Rozwiązania testu wiedzy algorytmicznej

XVII OIJ, zawody I stopnia, tura testowa
27 października 2022

Olimpiada Informatyczna Juniorów

1. **Rozważmy poniższą funkcję:**

   wersja C++

   ```
   int f(int n) {
     return 3 * n + 1;
   }
   ```

   wersja Python

   ```
   def f(n):
     return 3 * n + 1
   ```

   Jaki będzie wynik wywołania `f(f(2))`?

22

   Rozwiązanie: $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$, stąd $f(f(2)) = f(7) = 3 \cdot 7 + 1 = 22$.

2. **Rozważmy poniższą funkcję:**

   wersja C++

   ```
   bool f(string s) {
     int d = s.size();
     for (int i = 0; i < d; i++)
       if (s[i] != s[d - 1 - i])
         return false;
     return true;
   }
   ```

   wersja Python

   ```
   def f(s):
     d = len(s)
     for i in range(d):
       if s[i] != s[d - 1 - i]:
         return False
     return True
   ```

   Zaznacz wszystkie wartości parametru s, dla których wywołanie `f(s)` zwraca wartość `true`/`True`.

   ☒ `aaaaa`

   ☐ `oij`

   ☐ `oioioi`

   ☒ `anna`

   Rozwiązanie: Funkcja sprawdza czy pierwszy znak jest równy ostatniemu, czy drugi znak jest równy przedostatniemu i tak dalej, a zatem sprawdza czy napis s podany jako parametr jest palindromem.

3. **Poprawnym nawiasowaniem nazywamy napis, który może powstać z poprawnego wyrażenia arytmetycznego przez opuszczenie wszystkiego poza znakami nawiasów. Przykładowo, nawiasowanie `()(())` jest poprawne, a mogło powstać na przykład z wyrażenia $(2+2)\cdot(7\cdot(3-5)+2)$. Zaznacz wszystkie nawiasowania, które mogą być poprawne jeśli usuniemy z nich jeden znak.**

   ☐ `)(()`

   ☒ `((()))`

   ☐ `()()())()()()(`

   ☒ `(()(())()`

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025”.

4. **Rozważmy poniższą funkcję:**

wersja C++

```
void f(int n) {
  for (int i = 0; i < n; i += 3)
    for (int j = 0; j < n; j += 2)
      cout << "*";
}
```

wersja Python

```
def f(n):
  for i in range(0, n, 3):
    for j in range(0, n, 2):
      print('*', end='')
```

Ile gwiazdek wypisze wywołanie `f(20)`**?**

70

Rozwiązanie: Pierwsza pętla przechodzi po $i \in \{0, 3, 6, \ldots, 18\}$ (7 możliwości), a druga pętla po $j \in \{0, 2, 4, \ldots, 18\}$ (10 możliwości). Gwiazdka wypisywana jest dla każdej pary (i, j) z opisanych wcześniej zbiorów, stąd wypisanych będzie $7 \cdot 10 = 70$ gwiazdek.

5. **Której z poniższych instrukcji należy użyć (w języku C++ lub Python), aby obliczyć wartość wyrażenia $x - \lfloor \frac{x}{y} \rfloor \cdot y$ dla dowolnych dodatnich całkowitych wartości x i y nie przekraczających $1\,000$? Dla przypomnienia: symbol $\lfloor \cdot \rfloor$ oznacza zaokrąglenie w dół do najbliższej liczby całkowitej. Na przykład: $\lfloor 2\frac{4}{5} \rfloor = 2$.**

- ☐ `x + y`
- ☐ `x * y`
- ☐ `x ^ y`
- ☒ `x % y`

Rozwiązanie: Jeżeli od dzielnej odejmiemy wynik dzielenia razy dzielnik, to odjęliśmy wszystko poza resztą z dzielenia. W C++ i w Pythonie operator reszty z dzielenia to `%`.

6. **Rozważmy poniższą funkcję:**

wersja C++

```
bool f(string s) {
  for (char x : s)
    if (x == 'a')
      return false;
  return true;
}
```

wersja Python

```
def f(s):
  for x in s:
    if x == 'a':
      return False
  return True
```

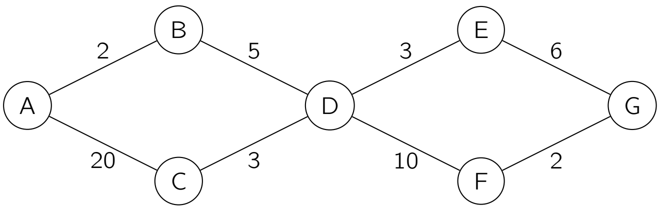
Zaznacz poniżej wszystkie wartości parametru s, dla których wywołanie `f(s)` **zwraca wartość** `true`/`True`**.**

- ☐ `kajak`
- ☒ `olek`
- ☐ `aaaaaaaaaa`
- ☒ `oij`
- ☒ 2023

Rozwiązanie: Funkcja zwraca `true`/`True` tylko jeśli napis podany na wejściu nie zawiera litery a.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025".

7. **Na poniższym rysunku przedstawiona jest sieć połączeń między punktami. Liczby przy krawędziach oznaczają czas przejścia daną drogą w minutach. Listonosz wyrusza z punktu A i chce zostawić list w każdym punkcie od B do G, w dowolnej kolejności. Listonosz może zakończyć trasę w dowolnym punkcie, a podczas trasy może zawracać.**



Sieć połączeń między domami. Etykiety krawędzi oznaczają czas przejścia w minutach.

Jaki jest najkrótszy czas (w minutach) w jakim może tego dokonać?

24

Rozwiązanie: Optymalna ścieżka przebiega kolejno przez punkty $A \to B \to D \to C \to D \to E \to G \to F$. Jej koszt to $2 + 5 + 3 + 3 + 3 + 6 + 2 = 24$ minuty.

8. **Rozważmy poniższą funkcję:**

wersja C++

```
void f(string s) {
  bool zapis = false;
  for (char x : s) {
    if (zapis) cout << x;
    zapis = !zapis;
  }
}
```

wersja Python

```
def f(s):
  zapis = False
  for x in s:
    if zapis: print(x, end='')
    zapis = not zapis
```

Co zostanie wypisane po wywołaniu funkcji `f("1234567")`**?**

246

Rozwiązanie: Funkcja wybiera z napisu co drugi znak poczynając od drugiego.

9. **Jaka jest najmniejsza liczba naturalna o sumie cyfr 20 i wszystkich cyfrach różnych?**

389

Rozwiązanie: Skoro każda cyfra może być równa co najwyżej 9, konieczna będzie liczba co najmniej trzycyfrowa. Cyfra setek musi być równa co najmniej 3, ponieważ z mniej znaczących cyfr możemy uzyskać sumę co najwyżej $8 + 9 = 17$. Optymalnie jest więc wybrać liczbę 389.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025".

10. **Rozważmy poniższą funkcję:**

wersja C++

```
int f(int n) {
  int wynik = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++)
    for (int j = 0; j < n; j++)
      if ((i + j) % 2 == 0)
        wynik++;
  return wynik;
}
```

wersja Python

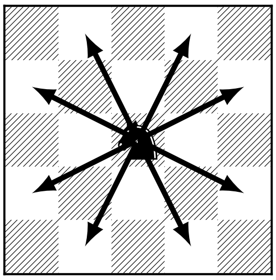
```
def f(n):
  wynik = 0
  for i in range(n):
    for j in range(n):
      if (i + j) % 2 == 0:
        wynik += 1
  return wynik
```

Jaki będzie wynik wywołania `f(8)`**?**

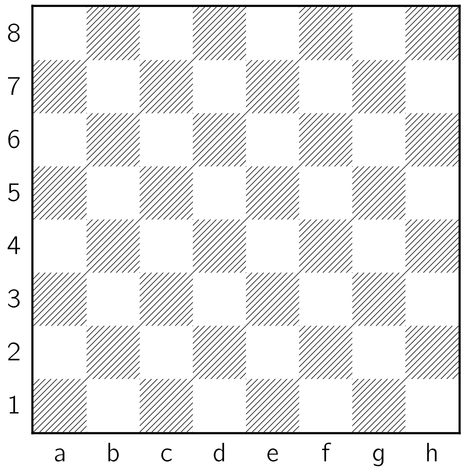
32

Rozwiązanie: Jeśli wyobrazimy sobie szachownicę 8×8 i przyjmiemy, że i jest numerem wiersza, a j numerem kolumny w szachownicy, to wynik zwiększany jest tylko dla tych par (i, j), że pole (i, j) jest czarne. Na szachownicy 8×8 są 32 pola czarne.

11. **Skoczek szachowy może poruszać się po szachownicy zgodnie z rysunkiem poniżej (w jednym ruchu o dwa pola w pionie i jedno w poziomie lub jedno pole w pionie i dwa w poziomie.**



Możliwe ruchy skoczka szachowego



Szachownica 8×8.

Ile najmniej ruchów musi wykonać skoczek szachowy, aby przedostać się z pola `a1` **(lewy dolny róg szachownicy) do pola** `h8` **(prawy górny róg szachownicy** 8×8**)?**

6

Rozwiązanie: Przykładowe rozwiązanie to: `a1` → `c2` → `e3` → `d5` → `e7` → `g6` → `h8`.
Pokażemy, że nie jest możliwe dotarcie do celu w mniej niż sześciu ruchach. Zauważmy, że odległość między polami `a1` oraz `h8` to siedem pól w pionie i siedem pól w poziomie. Razem różnica pozycji wynosi $7+7=14$. Ruchy skoczka mogą zmieniać tę różnicę jedynie o $+3$, $+1$, -1 lub -3. Potrzeba co najmniej sześciu takich zmian różnicy aby zmienić różnicę pozycji o 14.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025".

12. **Ile jest liczb naturalnych z przedziału od 1 do 100 włącznie, w których zapisie w systemie dwójkowym (bez zer wiodących) występuje cyfra 0?**

94

Rozwiązanie: Jedynie liczby postaci $2^k - 1$ (dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) czyli $1, 3, 7, 15, 31, 63$ składają się z samych jedynek w zapisie dwójkowym. Wszystkie pozostałe liczby mają co najmniej jedno zero. Pozostałych liczb jest $100 - 6 = 94$.

13. **Z ciągu $(6, 1, 10, 4, 8, 3, 9, 5, 2, 12, 7)$ należy wykreślić niektóre elementy w taki sposób, aby pozostałe elementy czytane od lewej do prawej tworzyły ciąg rosnący. Ile co najwyżej elementów możemy pozostawić w ciągu?**

5

Rozwiązanie: Optymalnie jest pozostawić ciąg $(1, 4, 8, 9, 12)$.

14. **Rozważmy poniższą funkcję rekurencyjną:**

wersja C++

```
int f(int n) {
  if (n < 0) return 0;
  return n + f(n - 2);
}
```

wersja Python

```
def f(n):
  if n < 0: return 0
  return n + f(n - 2)
```

Jaki wynik zwróci wywołanie `f(21)`?

121

Rozwiązanie: Wynikiem działania funkcji będzie:

$$21 + 19 + 17 + \ldots + 1$$

Ponieważ dodawanie jest przemienne, możemy pogrupować wyrazy powyższej sumy w następujący sposób: pierwszy z ostatnim, drugi z przedostatnim itd. Otrzymamy wtedy:

$$21 + 1 + 19 + 3 + 17 + 5 + 15 + 7 + 13 + 9 + 11$$

A zatem każda pełna grupa ma sumę 22, jest pięć pełnych grup i jedna niepełna grupa (zawierająca liczbę 11). Ostatecznie otrzymujemy $5 \cdot 22 + 11 = 121$.

15. **Zaznacz wszystkie liczby podzielne przez 3.**

- ☒ $123\,456$
- ☐ 11111_2 (liczba podana jest w systemie dwójkowym)
- ☐ $10^9 + 1$
- ☐ 2^{30}

Rozwiązanie: Liczbę $123\,456$ możemy sprawdzić z użyciem standardowej reguły podzielności przez 3 (suma cyfr jest podzielna przez 3). Liczba $11111_2 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$, a więc nie jest podzielna przez 3. Liczba $10^9 + 1$ ma sumę cyfr 2, jest więc niepodzielna przez 3. Liczba 2^{30} ma w rozkładzie na czynniki pierwsze jedynie czynniki 2, a nie ma żadnego czynnika 3, stąd jest niepodzielna przez 3.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025".

16. **Rozważmy poniższą funkcję:**

wersja C++

```
int f(int n, int k) {
  int wynik = 1;
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    if (i != k)
      wynik *= i;
  return wynik;
}
```

wersja Python

```
def f(n, k):
  wynik = 1
  for i in range(1, n + 1):
    if i != k:
      wynik *= i
  return wynik
```

Z jaką wartością k wywołano `f(6, k)`, jeżeli uzyskany wynik to 144?

5

Rozwiązanie: Program oblicza wynik dzielenia silni liczby n (iloczynu $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$) przez k (lub, jeśli k nie jest w przedziale 1 do n, program oblicza po prostu silnię liczby n).
Można próbować rozwiązać równanie $\frac{6!}{k} = 144$, ale obliczeniowo najłatwiej jest rozważyć rozkład na czynniki pierwsze liczby $6! = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3$. Jest to liczba podzielna przez 5, zaś liczba 144 nie jest podzielna przez 5, stąd $k = 5$.

17. **Rozważmy system monetarny, w którym są jedynie nominały 9 oraz 25. Ile całkowitych kwot między 1 i 100 włącznie można wydać z użyciem tych nominałów? Każdego nominału można użyć dowolnie wiele razy.**

30

Rozwiązanie: Wydając kwotę od 1 do 100 możemy użyć nominału 25 co najwyżej cztery razy:

- jeśli nie użyjemy go wcale, możemy wydać nominałem 9 kwoty $9, 18, \ldots, 99$ (11 możliwości),
- jeżeli użyjemy go raz, możemy wydać kwoty $25, 34, 43, \ldots, 97$ (9 możliwości),
- jeżeli użyjemy go dwa razy, możemy wydać kwoty $50, 59, 68, \ldots, 95$ (6 możliwości),
- jeżeli użyjemy go trzy razy, możemy wydać kwoty $75, 84, 93$ (3 możliwości),
- jeżeli użyjemy go cztery razy, możemy wydać kwotę 100 (jedna możliwość).

Wszystkie uzyskane możliwości dały różne kwoty, co oznacza że mamy $11+9+6+3+1 = 30$ różnych kwot, które można wydać.

18. **Ile wynosi suma wszystkich 24 różnych liczb jakie można uzyskać przez ustawienie cyfr 1, 2, 3 i 4 w pewnej kolejności? Każdej cyfry należy użyć dokładnie raz.**

66660

Rozwiązanie: Wszystkich liczb jest dość dużo, można jednak skupić się na konkretnej cyfrze i konkretnej pozycji dziesiętnej. Na przykład: cyfra 3 wystąpi na pozycji cyfry jedności dokładnie sześć razy (bo na pozostałych pozycjach cyfry 1, 2 i 4 można ustawić na sześć sposobów).
Bardziej ogólnie, ustalmy konkretną cyfrę oraz konkretną pozycję dziesiętną. Jest dokładnie sześć ustawień pozostałych cyfr na pozostałych pozycjach dziesiętnych. A więc dla każdej cyfry i każdej pozycji dziesiętnej musimy policzyć ten wkład sześciokrotnie. Suma liczb z zadania wynikająca z cyfr jedności wynosi $6 \cdot (1+2+3+4) = 60$. Analogicznie wkład z cyfr dziesiątek wynosi 600, cyfr setek $6\,000$, a cyfr tysięcy $60\,000$. Łączna suma wszystkich ustawień cyfr jest więc równa $66\,660$.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025".

19. **Rozważmy poniższą funkcję rekurencyjną:**

wersja C++

```cpp
void f(int poziom, int wartosc) {
  if (poziom == 5) {
    cout << wartosc << "\n";
    return;
  }
  f(poziom + 1, 2 * wartosc);
  f(poziom + 1, 2 * wartosc + 1);
}
```

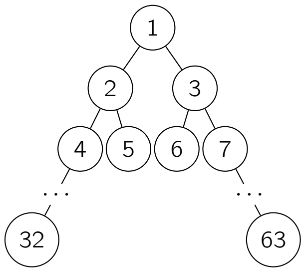
wersja Python

```python
def f(poziom, wartosc):
  if poziom == 5:
    print(wartosc)
    return
  f(poziom + 1, 2 * wartosc)
  f(poziom + 1, 2 * wartosc + 1)
```

Jaka będzie największa wypisana wartość po wywołaniu `f(0, 1)`**?**

63

Rozwiązanie: Na poziomie 1 uzyskać możemy wartości 2 lub 3, na poziomie drugim wartości $4, 5, 6$ lub 7, na poziomie trzecim wartości od 8 do 15 włącznie, na poziomie czwartym wartości od 16 do 31 włącznie, zaś na poziomie piątym wartości od 32 do 63 włącznie.



Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025".

20. **Rozważmy poniższą funkcję:**

wersja C++

```
int f(int n) {
  int wynik = 0;
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    int ile = 0;
    for (int j = 1; j <= i; j++)
      if (i % j == 0)
        ile++;
    if ((ile >= 6) and (ile <= 8))
      wynik++;
  }
  return wynik;
}
```

wersja Python

```
def f(n):
  wynik = 0
  for i in range(1, n + 1):
    ile = 0
    for j in range(1, i + 1):
      if i % j == 0:
        ile += 1
    if (ile >= 6) and (ile <= 8):
      wynik += 1
  return wynik
```

Jaki jest wynik wywołania `f(80)`?

23

Rozwiązanie: Funkcja sprawdza ile spośród liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ ma od sześciu do ośmiu dzielników. Zauważmy, że liczba postaci

$$N = {p_1}^{q_1} \cdot {p_2}^{q_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{q_n}$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są różnymi liczbami pierwszymi ma dokładnie

$$(q_1 + 1) \cdot (q_2 + 1) \cdot \ldots (q_n + 1)$$

dzielników. Wynika to z faktu, że każda liczba postaci:

$${p_1}^{r_1} \cdot {p_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{r_n}$$

gdzie $r_i \in \{0, 1, 2, \ldots, q_i\}$ jest unikalnym dzielnikiem N.
Spróbujemy dopasować do tego wzoru liczby tak, aby miały 6, 7 lub 8 dzielników.
Rozważmy najpierw liczby z zakresu 1 do 80 włącznie, które mają dokładnie siedem dzielników. Są to liczby postaci p^6, gdzie p jest liczbą pierwszą. Dla $p = 2$ otrzymujemy liczbę 64, zaś dla większych p otrzymamy liczby większe niż 80.
Liczby, które mają sześć dzielników są postaci p^5 (w interesującym nas zakresie jest jedynie liczba $2^5 = 32$) lub $p^2 \cdot q$, gdzie $p \neq q$ są liczbami pierwszymi. Dla $p = 2$ w interesującym nas zakresie znajdziemy $q \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, co daje liczby $12, 20, 28, 44, 52, 68, 76$. Dla $p = 3$ pasują $q \in \{2, 5, 7\}$, czyli liczby $18, 45, 63$. Dla $p = 5$ pasują $q \in \{2, 3\}$, czyli liczby 50 i 75. Dla większych p uzyskiwane liczby będą poza interesującym nas zakresem.
Liczby, które mają osiem dzielników są postaci:

- p^7 (w interesującym nas zakresie nie ma żadnej takiej liczby)
- $p^3 \cdot q$ (z założeniami jak wyżej) Dla $p = 2$, możemy przyjąć $q \in \{3, 5, 7\}$ otrzymując liczby $24, 40$ oraz 56. Dla $p = 3$ możemy przyjąć $q = 2$ otrzymując liczbę 54. Dla większych p uzyskiwane liczby będą poza interesującym nas zakresem.
- lub $p \cdot q \cdot r$ (gdzie p, q, r to różne liczby pierwsze). Pasujące rozkłady to: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$, $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$ oraz $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.

Ostatecznie, są 23 liczby o sześciu, siedmiu lub ośmiu dzielnikach.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025”.