Pytania algorytmiczne (wybrane rozwiązania)

XIV OIJ, zawody I stopnia, tura testowa
16 września 2019 – 13 stycznia 2020

26. **Jaka jest największa kwota, której nie można wydać mając do dyspozycji jedynie monety o nominałach sześcio- i jedenastobajtalarowych? (dowolnie wiele monet z każdego nominału)**

49

Zaobserwujmy, że jeśli możliwe jest wydanie kwoty x ustalonymi nominałami, to jest również możliwe wydanie dowolnej kwoty postaci $x + 6k$ dla $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ (wystarczy wydać x i dołożyć k monet o nominale 6). W szczególności dla $k = 0$ możemy wydać dowolną kwotę podzielną przez 6.
Zastanówmy się teraz, ile razy chcemy użyć monety 11. Jeśli użyjemy jej raz, wydamy $11 + 6k$, dla dowolnego k, czyli $5 + 6k$ dla dowolnego $k \geq 1$. Oczywiście kwoty 5 nie da się wydać w żaden sposób. Dla liczb postaci $5 + 6k$ możemy więc osiągnąć 11 i wszystkie większe kwoty, ale mniejszych nie.
Jeśli monety 11 użyjemy dwa razy, wydamy $22 + 6k$, czyli $4 + 6k$. Podobnie, 22 jest najmniejszą osiągalną kwotą dla liczb dających resztę 4 z dzielenia przez 6. Analogicznie widzimy, że 33 jest kwotą graniczną dla liczb postaci $3 + 6k$, 44 dla $2 + 6k$, a 55 dla $5 + 6k$. Użycie monety 11 więcej niż 5 razy nie przyniesie niczego nowego, bo kwotę $6 \cdot 11 = 66$ równie dobrze możemy osiągnąć za pomocą monet 6.
A zatem: nie jest możliwe wydanie reszty $55 - 6 = 49$ i jest to jednocześnie największa kwota, której nie można wydać z użyciem nominałów 6 i 11.

Ciekawostka: przeprowadzając podobne rozumowanie jak powyżej dla dowolnych nominałów x i y, których największy wspólny dzielnik jest równy 1, otrzymujemy wzór ogólny na rozwiązanie: $(x - 1) \cdot (y - 1) - 1$.

37. **Ciąg nawiasów `(` i `)` nazywamy poprawnym nawiasowaniem, jeśli jest możliwe wstawienie do niego znaków `1` oraz `+`, aby uzyskać prawidłowe działanie matematyczne. Na przykład: `()(())` oraz `(()()(()()))` są poprawnymi nawiasowaniami, ale `)(`, `(()))` oraz `((()` nie są. Istnieją jedynie dwa poprawne nawiasowania o długości 4: `(())` oraz `()()`. Ile jest poprawnych nawiasowań o długości 8?**

14

Niech P_k oznacza dowolne poprawne nawiasowanie długości k. Poprawne nawiasowanie P_8 ma jedną z postaci:

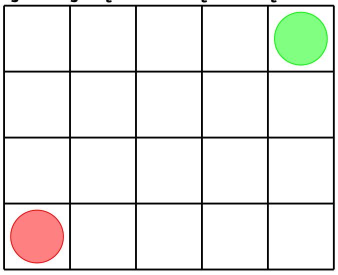
- (P_6)
- $(P_4)()$
- $(())P_4$
- $()P_6$

Co więcej: każde nawiasowanie P_8 pasuje tylko do jednej z powyższych możliwości, a więc można zsumować ile jest nawiasowań dla każdej z nich. W tym celu musimy ustalić, że są dwa nawiasowania P_4 (podane w treści zadania) oraz pięć nawiasowań P_6: `((()))`, `(()())`, `(())()`, `()(())`, `()()()`. A zatem nawiasowań jest: $5 + 2 + 2 + 5 = 14$.
Ciekawostka: liczbę poprawnych nawiasowań długości $2n$ opisuje n-ta liczba Catalana[a].

[a] https://pl.wikipedia.org/wiki/Liczby_Catalana

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

50. **Rozważmy planszę na obrazku poniżej. Chcemy przedostać się z pola startowego (czerwone) do pola końcowego (zielone). W jednym ruchu można przesunąć się o jedno pole w górę, dół, lewo lub prawo. Musimy wykonać najmniejszą możliwą liczbę ruchów. Ile jest różnych dróg, które na to pozwolą?**



Plansza

35

Łącznie trzeba będzie wykonać 7 ruchów, cztery w prawo oraz trzy w górę. Możemy zatem sobie wyobrazić sobie, że mamy cztery kartki ze strzałkami w prawo oraz trzy kartki ze strzałkami w górę, które musimy ustawić kolejno w ciąg. Zauważmy, że wystarczy powiedzieć, na których miejscach znajdą się strzałki w górę. Pytanie zatem sprowadza się do ustalenia liczby podzbiorów trzyelementowych zbioru $\{1,2,...,7\}$: każdy taki podzbiór odpowiada numerom ruchów, w których podejmujemy decyzję aby przesunąć się w górę. Na przykład: podzbiór $\{2,3,7\}$ oznacza ciąg ruchów: w prawo, w górę, w górę, w prawo, w prawo, w prawo, w górę.
Gdyby pytanie dotyczyło ile jest ciągów trzyelementowych o parami różnych elementach ze zbioru $\{1,2,...,7\}$ to odpowiedzią byłoby $7 \cdot 6 \cdot 5$: pierwszy element możnaby wybrać na 7 sposobów, kolejny zawsze na 6 sposobów, a ostatni na 5 sposobów. Rozważamy jednak podzbiory (czyli nieuporządkowane ciągi parami różnych elementów). Każdy taki podzbiór policzyliśmy w powyższym rozważaniu 6 razy: jako (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a), a powinniśmy policzyć tylko raz. Wystarczy zatem podzielić uzyskaną liczbę ciągów przez 6 i otrzymamy liczbę $7 \cdot 5 = 35$ podzbiorów trzyelementowych zbioru $\{1,2,...,7\}$ czyli 35 różnych najkrótszych ścieżek z pola czerwonego do zielonego.
Ciekawostka: istnieje wzór ogólny na rozwiązanie tego zadania, korzystający z tak zwanego symbolu Newtona[a] (opisującego liczbę różnych podzbiorów K-elementowych zbioru N-elementowego): $\binom{n+m-2}{n-1}$, gdzie n oznacza wysokość planszy, a m oznacza szerokosć planszy.

[a] `https://pl.wikipedia.org/wiki/Symbol_Newtona`

67. **Podciągiem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać poprzez zakrycie niektórych jego liter (być może wszystkich, a być może żadnej). Na przykład: podciągami słowa `abc` są puste słowo, `a`, `b`, `c`, `ab`, `ac`, `bc` oraz `abc`. Ile jest różnych podciągów słowa `abcddd`? Słowa, które są takie same, ale można je uzyskać zakrywając różne pozycje liczymy jedynie jeden raz.**

32

Wszystkie podciągi możemy podzielić na dwie części: część lewą, która zawiera jedynie litery `abc` (być może żadną z nich) oraz część prawą, która zawiera jedynie litery `d` (ponownie być może zero takich liter).
Słowo `abc` ma 8 podciągów: każdą literę można (niezależnie od pozostałych) zakryć lub pozostawić: jest więc $2^3 = 8$ podzbiorów pozycji, które zakryjemy.
Dla każdego z tych sposobów podejmujemy (niezależnie) decyzję jaką prawą część do niego dołożymy, tj. ile zakryć liter `d`: zero, jedną, dwie lub trzy (cztery możliwości).
Otrzymujemy zatem $8 \cdot 4 = 32$ podciągi.
Ciekawostka: zadanie można rozwiązać ogólnie, dla dowolnego słowa: patrz fragment rozwiązania zadania *Podciągi* z I etapu XXVI Olimpiady Informatycznej: `https://oi.edu.pl/pl/archive/oi/26/pod`.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

71. **Elementy $\{1,1,2\}$ można ustawić w ciąg na trzy różne sposoby: $(1,1,2)$, $(1,2,1)$ oraz $(2,1,1)$. Na ile różnych sposobów można ustawić w ciąg elementy $\{1,2,2,3,3,3\}$?**

60

Ciąg ma długość 6. Jedynkę można więc ustawić na jedną z sześciu możliwości, pozostawiając jeszcze pięć wolnych pozycji. Spośród tych pięciu pozycji należy wybrać dwie, gdzie zostaną wstawione dwójki. Można tego dokonać na $\frac{5 \cdot 4}{2}$ sposoby ($5 \cdot 4$ to liczba sposobów wyboru pozycji dla pierwszej i drugiej dwójki, a dzielenie przez 2 pozwala utożsamić ze sobą wybór tych samych pozycji, ale w różnej kolejności). Pozostałe trzy pozycje zostaną zajęte przez liczby 3. Razem mamy więc $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60$ sposobów.
Ciekawostka: problem poruszony w tym zadaniu to tak zwane *permutacje z powtórzeniami*[a].

[a] https://pl.wikipedia.org/wiki/Permutacja#Permutacja_z_powt%C3%B3rzeniami

74. **Anagramem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać ustawiając wszystkie jego litery w dowolnej kolejności. Na przykład, istnieją trzy anagramy słowa `aab`, są to: `aab`, `aba` oraz `baa`. Ile najmniej liter może mieć słowo, dla którego istnieje dokładnie 35 anagramów? Wielokrotne wystąpienia tej samej litery liczymy wielokrotnie.**

7

Ponownie zastosujemy symbol Newtona[a]. Zauważmy, że na wynik ma wpływ jedynie liczba wystąpień każdej litery alfabetu w słowie. Możemy się więc umówić, że słowo ma k_1 liter `a`, k_2 liter `b`, k_3 liter `c` i tak dalej. Spośród $n = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$ pozycji, musimy wybrać k_1, w których postawimy literę `a`. Możemy tego dokonać na $\binom{n}{k_1}$ sposobów. Następnie pozostaje nam $n - k_1$ wolnych miejsc, w które wstawiamy k_2 liter `b`. Możemy tego dokonać na $\binom{n-k_1}{k_2}$ sposobów i tak dalej. Kontynuując to rozważanie dochodzimy do wniosku, że liczba anagramów słowa to:

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \ldots$$

Ponieważ postać wzoru to iloczyn, jednym z czynników musi być 7 lub 35 (wynika to z rozkładu na czynniki pierwsze liczby $35 = 5 \cdot 7$). Biorąc pod uwagę, że $\binom{N}{K} = \frac{N!}{K!(N-K)!}$ otrzymujemy, że ten czynnik 7 lub 35 musi występować w n, czyli słowo musi mieć długość 7 lub 35. Z uwagi na to, że chcemy mieć słowo jak najkrótsze, spróbujmy osiągnąć długość 7.
Zauważmy, że:

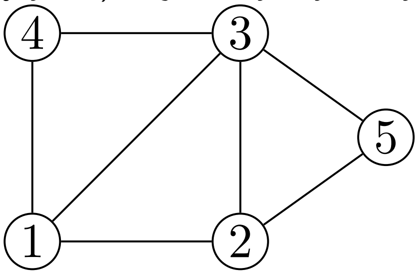
$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 35$$

A zatem słowo, które ma długość 7 i trzy litery `a` oraz pozostałe litery `b` spełnia warunki zadania. Na przykład: `aaabbbb` jest więc słowem o 35 anagramach, a z wcześniejszych rozważań mamy też, że jest to słowo najkrótsze możliwe. Odpowiedzią zadania jest długość uzyskanego słowa czyli 7.
Ciekawostka: zadanie w ogólniejszej wersji (podaj najmniejszą długość słowa, które ma dokładnie n anagramów) pochodzi z Akademickich Mistrzostw Polski w Programowaniu Zespołowym 2016: `http://amppz.ii.uni.wroc.pl/amppz2016`.

[a] https://pl.wikipedia.org/wiki/Symbol_Newtona

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

102. **Graf to zbiór wierzchołków połączonych krawędziami, jak na poniższym rysunku. Cykl to droga w grafie, która wychodzi z pewnego wierzchołka, przechodzi wzdłuż kilku krawędzi i wraca z powrotem do tego samego wierzchołka tak, aby żadnego wierzchołka po drodze nie odwiedzić dwukrotnie (na przykład $1{-}2{-}3{-}1$, albo $1{-}4{-}3{-}2{-}1$ są cyklami). Ile jest różnych cykli na rysunku?**



Graf

6

Aby nie pomylić się w liczeniu, skupmy się na liczbie krawędzi:

- cykle pięciokrawędziowe: jest tylko jeden: $(1,2,5,3,4)$,
- cykle czterokrawędziowe: są dwa: $(1,2,3,4)$, $(1,2,5,3)$,
- cykle trzykrawędziowe: są trzy: $(1,2,3)$, $(1,3,4)$, $(2,3,5)$.

Razem jest 6 cykli prostych.

107. **Rozważmy wyświetlacz siedmiosegmentowy, popularny w zegarkach, kuchenkach mikrofalowych, licznikach rowerowych i wielu innych. Każda cyfra może być uzyskana poprzez zapalenie lub zgaszenie jednego z siedmiu segmentów wyświetlacza. Wyświetlacz może wyświetlić dowolnie wiele cyfr, na każdą z nich przeznaczone jest osobne 7 segmentów. Najmniejszą liczbą jaką można wyświetlić zapalając dokładnie cztery segmenty wyświetlacza jest 4, a największa liczba to 11. Jaka jest najmniejsza liczba, którą można wyświetlić zapalając dokładnie 18 segmentów? Liczby te nie mogą mieć zer wiodących, tj. nadmiarowych zer z lewej strony.**

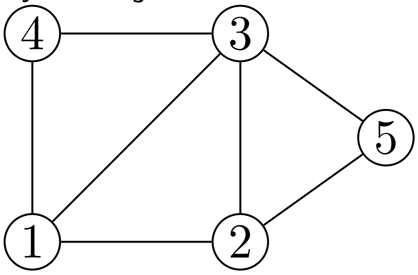

Cyfry na wyświetlaczu siedmiosegmentowym

208

Cyfry 0, 1, $\ldots$, 9 zużywają odpowiednio $6,2,5,5,4,5,6,3,7,6$ segmentów. Liczba, której poszukujemy musi mieć co najmniej trzy cyfry (bo mamy 18 segmentów, a jedna cyfra zużywa ich co najwyżej 7). Jako, że dążymy do uzyskania jak najmniejszej liczby, chcemy aby miała ona dokładnie trzy cyfry. Aby to się mogło udać, pierwsza cyfra musi zużyć co najmniej cztery segmenty, bo pozostałe dwie cyfry zużyć ich mogą co najwyżej 14. A zatem pierwszą cyfrą liczby nie może być 0 (bo powstałoby zero wiodące) ani 1 (bo ma tylko dwa segmenty). Może być to natomiast cyfra 2. Pozostaje nam 13 segmentów, czyli pozostałe cyfry muszą zużyć 6 i 7 segmentów. Najmniejszy dopisek spełniający ten warunek to: 08, a więc cała liczba to 208.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

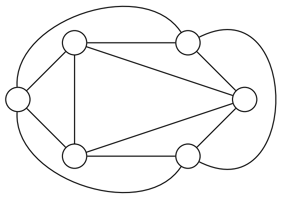
110. **Graf to zbiór wierzchołków połączonych krawędziami, jak na poniższym rysunku. Ile najwięcej krawędzi można narysować w grafie o sześciu wierzchołkach tak, aby się nie przecinały?**



Przykładowy graf

12

Grafy, które można narysować tak, żeby ich krawędzie się nie przecinały nazywamy *planarnymi*. Na początku zauważmy, że możliwe jest narysowanie grafu planarnego, który ma 12 krawędzi:



Każdy graf sześciowierzchołkowy o co najmniej sześciu krawędziach musi zawierać cykl. Istnieje kilka możliwości na długość najdłuższego cyklu prostego w grafie sześciowierzchołkowym: może on mieć 3, 4, 5 lub 6 krawędzi. Przeanalizujemy tylko ostatni przypadek (pozostałe, równie proste, ale bardziej żmudne, pozostawiamy do sprawdzenia samemu): jeśli najdłuższy cykl prosty ma sześć krawędzi to co najwyżej trzy krawędzie można poprowadzić w jego wnętrzu i co najwyżej trzy krawędzie można poprowadzić na zewnątrz cyklu (przypadek ten jest pokazany na rysunku powyżej).

Ciekawostka: zadanie można rozwiązać ogólnie, dla każdej liczby wierzchołków n w grafie. Liczba krawędzi n-wierzchołkowego grafu planarnego nie może przekroczyć $3n - 6$.

119. **Słowo złożone jedynie z zer i jedynek nazywamy ciekawym, jeśli nie zawiera dwóch sąsiednich jedynek. Na przykład słowo** `10010001` **jest ciekawe, ale słowo** `1011010` **nie jest. Ile jest siedmioznakowych ciekawych słów?**

34

Niech F_n oznacza liczbę ciekawych słów o długości n. Dowolne słowo ciekawe o długości co najmniej 2 musi się albo zaczynać cyfrą `0`, albo mieć na początku `10`. Niezależnie od tego co będzie na początku (`0` czy `10`), zaraz za tym należy dostawić ciekawe słowo o długości odpowiednio $n - 1$ lub $n - 2$. To oznacza, że ciekawych słów o długości n jest tyle samo co liczba ciekawych słów o długości $n - 1$ plus liczba ciekawych słów o długości $n - 2$. Otrzymujemy więc $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Biorąc pod uwagę, że $F_1 = 2$ oraz $F_2 = 3$, możemy obliczyć $F_3 = 5$, $F_4 = 8$, $F_5 = 13$, $F_6 = 21$ i wreszcie $F_7 = 34$.

Ciekawostka: F_n to liczby z ciągu Fibonacciego. Na stronie Olimpiady Informatycznej Juniorów, w dziale Dla zawodnika znajduje się samouczek, gdzie bardzo dokładnie poruszono temat obliczania liczb Fibonacciego: `https://oij.edu.pl/zawodnik/zadania/samouczek/`. Zachęcamy do lektury.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".