Tyrolka (rozwiązanie)

Autor zadania: **Adam Górkiewicz**
Opracowanie: **Tomasz Nowak, Tymoteusz Wiśniewski**
Opis rozwiązania: **Lech Duraj**

Olimpiada Informatyczna Juniorów

Z podanych punktów $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ musimy wybrać taką parę (i, j), żeby nachylenie odcinka $i \to j$, czyli wartość:

$$\frac{|y_i - y_j|}{|x_i - x_j|}$$

była najmniejsza możliwa. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że musimy sprawdzić $O(N^2)$ par punktów, a więc nie zejdziemy poniżej tej złożoności. Szybko jednak okazuje się, że nie musimy sprawdzać wszystkich par, bo kandydatów na najlepszą jest znacznie mniej. Zapewniają nam to następujące dwie obserwacje:

1. Jeśli dla pewnej wartości y są przynajmniej trzy punkty z tą wartością: (x_i, y), (x_j, y), (x_k, y) przy $x_i < x_j < x_k$, to punkt środkowy (x_j, y) nie może stworzyć najlepszej pary z żadnym innym punktem.

Na powyższym rysunku są trzy punkty (czerwony, pomarańczowy i zielony) o tej samej współrzędnej y. Gdziekolwiek znajduje się czarny punkt, odcinek między czarnym i pomarańczowym ma zawsze większe nachylenie albo od odcinka czarny-czerwony, albo od odcinka czarny-zielony.

2. Dla dwóch punktów (x_i, y_i) oraz (x_j, y_j) takich, że $y_i < y_j$, jeśli istnieje trzeci punkt $A_k = (x_k, y_k)$ taki, że $y_i < y_k < y_j$, to odcinek A_iA_j nie może mieć najmniejszego nachylenia.

Odcinek między czarnymi punktami nie może mieć najlepszego nachylenia – czerwony punkt o współrzędnej y pomiędzy czarnymi powoduje, że jeden z czerwonych odcinków zawsze będzie lepszy.

Posortujmy dane punkty względem współrzędnej y, czyli ustawmy w kolejności $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ takiej, że $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_N$. Punkty o równej współrzędnej y niech z kolei będą uporządkowane względem współrzędnej x – zarówno sortowanie par w C++ (typ `pair<int,int>` z biblioteki STL), jak i sortowanie par w Pythonie zapewnia nam taki porządek bez konieczności pisania dodatkowego kodu.

Punkty o tej samej współrzędnej y tworzą teraz grupy sąsiednich elementów – w każdej grupie może być jeden lub więcej punktów. Z obserwacji 1. wynika, że z każdej takiej grupy wystarczy pozostawić pierwszy i ostatni punkt (tj. o najmniejszej i największej współrzędnej x), bo żaden z pozostałych nie jest kandydatem do najlepszego odcinka. Z kolei

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

obserwacja 2. gwarantuje, że do znalezienia najlepszej pary wystarczy sprawdzić punkty z sąsiadujących grup. Algorytm rozwiązujący nasze zadanie może więc wyglądać następująco:

- Posortuj punkty względem współrzędnej y (remisy rozstrzygając względem współrzędnej x) i podziel na grupy o równym y.
- Usuń z każdej grupy wszystkie punkty poza pierwszym i ostatnim.
- Dla każdych dwóch punktów (x_i, y_i) oraz (x_j, y_j) należących do sąsiednich grup sprawdź wartość nachylenia $\frac{|y_i - y_j|}{|x_i - x_j|}$ i zapamiętaj najmniejszą ze znalezionych wartości.

Skoro w każdej grupie pozostają co najwyżej dwa punkty, to dla każdych dwóch sąsiednich grup będzie trzeba sprawdzić co najwyżej 4 pary, a zatem łącznie jest co najwyżej $4 \cdot N$ par-kandydatów – tym samym nasz algorytm działa teraz w czasie $O(N)$.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".