Pytania algorytmiczne

XIV OIJ, zawody I stopnia, tura testowa
16 września 2019 – 13 stycznia 2020

Olimpiada Informatyczna Juniorów

Poniżej znajdują się pytania testowe z zawodów I stopnia XIV Olimpiady Informatycznej Juniorów (oij.edu.pl) – na teście wiedzy oij.edu.pl/sio) trzeba odpowiedzieć na 30 pytań wylosowanych z tej listy oraz listy pytań dla wybranego przez siebie języka. Nie musisz odpowiedzieć na wszystkie pytania, aby zakwalifikować się dalej. Poza testem, do rozwiązania będą jeszcze zadania programistyczne. Przewodnik dla stawiających pierwsze kroki z Olimpiadą można przeczytać na stronie oij.edu.pl/zawodnik/przewodnik/. Serdecznie zapraszamy do startu!

1. **Rozważmy poniższą funkcję rekurencyjną:**

```
F(x, y):
  jeżeli x = 0 to zwróć y
  zwróć F(x / 10, 10 * y + (x mod 10))
```

Zakładamy, że / oblicza iloraz z dzielenia (zaokrągla w dół), a `mod` oznacza operację obliczenia reszty z dzielenia. Jaki jest wynik działania `F(123, 0)`?

2. **Rozważmy poniższą funkcję rekurencyjną:**

```
F(x, y):
  jeżeli x = 0 to zwróć y
  zwróć F(x / 10, 10 * y + (x mod 10))
```

Zakładamy, że / oblicza iloraz z dzielenia (zaokrągla w dół), a `mod` oznacza operację obliczenia reszty z dzielenia. Jaki jest wynik działania `F(30, 10)`?

3. **Rozważmy poniższą funkcję `przelot`, która działa na tablicy `T[0...n-1]` zawierającej liczby naturalne:**

```
przelot(T):
  pętla i od 0 do n-2
    jeżeli T[i] > T[i+1]
      zamień miejscami T[i] oraz T[i+1]
```

Uruchamiamy kilka razy `przelot(T)`. Po ilu takich wykonaniach tablica `T` $[3, 4, 5, 1, 2]$ będzie posortowana rosnąco?

4. **Rozważmy poniższą funkcję `przelot`, która działa na tablicy `T[0...n-1]` zawierającej liczby naturalne:**

```
przelot(T):
  pętla i od 0 do n-2
    jeżeli T[i] > T[i+1]
      zamień miejscami T[i] oraz T[i+1]
```

Uruchamiamy kilka razy `przelot(T)`. Po ilu takich wykonaniach tablica `T` $[2, 1, 8, 5, 4]$ będzie posortowana rosnąco?

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

5. **Rozważmy poniższą funkcję `przelot`, która działa na tablicy `T[0...n-1]` zawierającej liczby naturalne:**

```
przelot(T):
  pętla i od 0 do n-2
    jeżeli T[i] > T[i+1]
      zamień miejscami T[i] oraz T[i+1]
```

Uruchamiamy kilka razy `przelot(T)`. Po ilu takich wykonaniach tablica `T` $[2, 5, 8, 4, 3, 7, 1]$ będzie posortowana rosnąco?

6. **Ciąg liczb Fibonacciego zdefiniowany jest następująco:**

$$\begin{cases} F(0) = 1 \\ F(1) = 1 \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2) \text{ dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Jaki jest największy wspólny dzielnik liczb $F(100)$ oraz $F(101)$?

7. **Jaki jest największy wspólny dzielnik liczb $2^{30} \cdot 9$ oraz $3^{30} \cdot 4$?**

8. **Jaki jest największy wspólny dzielnik liczb $10^9 + 1$ oraz 2?**

9. **Jaki jest największy wspólny dzielnik liczb 1260 oraz 2970?**

10. **Rozważmy poniższy kod:**

```
oblicz(x, y):
  jeżeli y = 0 to zwróć 0
  jeżeli y parzyste to zwróć 2 * oblicz(x, y / 2)
  zwróć 2 * oblicz(x, y / 2) + x
```

Zakładamy, że `/` oblicza iloraz z dzielenia (zaokrągla w dół). Operacja `zwróć` kończy działanie funkcji i podaje wynik. Jaki jest wynik działania `oblicz(4, 14)`?

11. **Rozważmy poniższy kod:**

```
oblicz(x, y):
  jeżeli y = 0 to zwróć 0
  jeżeli y parzyste to zwróć 2 * oblicz(x, y / 2)
  zwróć 2 * oblicz(x, y / 2) + x
```

Zakładamy, że `/` oblicza iloraz z dzielenia (zaokrągla w dół). Operacja `zwróć` kończy działanie funkcji i podaje wynik. Jaki jest wynik działania `oblicz(7, 13)`?

12. **Rozważmy poniższy kod:**

```
oblicz(x):
  jeżeli x = 0 to zwróć 1
  zwróć x * oblicz(x - 1)
```

Operacja `zwróć` kończy działanie funkcji i podaje wynik. Jaki jest wynik działania `oblicz(3)`?

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

13. **Rozważmy poniższy kod:**

```
oblicz(x):
  jeżeli x = 0 to zwróć 1
  zwróć x * oblicz(x - 1)
```

Operacja `zwróć` **kończy działanie funkcji i podaje wynik. Jaki jest wynik działania** `oblicz(4)`**?**

14. **Rozważmy poniższy kod:**

```
oblicz(x):
  jeżeli x = 0 to zwróć 1
  zwróć x * oblicz(x - 1)
```

Operacja `zwróć` **kończy działanie funkcji i podaje wynik. Jaki jest wynik działania** `oblicz(5)`**?**

15. **Masz do dyspozycji wagę szalkową i trzy przedmioty, o których wiesz, że ich wagi są różne. Ile w najgorszym razie potrzebujesz wykonać ważeń, aby wiedzieć, który z przedmiotów jest najlżejszy, a który najcięższy? Przy każdym ważeniu na każdej szalce wagi wolno położyć jedynie jeden przedmiot.**

16. **Masz do dyspozycji wagę szalkową i cztery przedmioty, o których wiesz, że ich wagi są różne. Ile w najgorszym razie potrzebujesz wykonać ważeń, aby wiedzieć, który z przedmiotów jest najlżejszy, a który najcięższy? Przy każdym ważeniu na każdej szalce wagi wolno położyć jedynie jeden przedmiot.**

17. **Z poniższego ciągu:** $[3, -1, -5, 4, -2, -1, 6, -3, 4, 5, -9, -5, 2, -3, 4]$ **chcemy pozostawić tylko pewien jego fragment między wybranymi dwoma elementami. Jaką największą sumę elementów możemy w ten sposób uzyskać?**

18. **Z poniższego ciągu:** $[1, 4, -8, 5, -1, 7, -3, 6, -2, -4, 5]$ **chcemy pozostawić tylko pewien jego fragment między wybranymi dwoma elementami. Jaką największą sumę elementów możemy w ten sposób uzyskać?**

19. **Z poniższego ciągu:** $[1, -2, 3, 4, -5, 6, 7, -8, 9, -10, -11, 12, -13, 14]$ **chcemy pozostawić tylko pewien jego fragment między wybranymi dwoma elementami. Jaką największą sumę elementów możemy w ten sposób uzyskać?**

20. **W Bajtocji w obiegu są monety o nominałach** 1, 3 **i** 4 **bajtalary. Sprzedawca chce wydać resztę** K **bajtalarów, i używa do tego następującego algorytmu:**

```
dopóki K > 0
  x <- największy nominał ze zbioru {1, 3, 4}, który nie przekracza K
  wydaj monetę o nominale x
  zmniejsz K o x
```

Sprzedawca chciałby wydać jak najmniej monet. Jaka jest najmniejsza kwota K**, dla której algorytm nie znajdzie najlepszego rozwiązania, lecz użyje więcej monet niż trzeba?**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

21. **W Bajtocji w obiegu są monety o nominałach 2, 5 i 6 bajtalarów. Sprzedawca chce wydać resztę K bajtalarów, i używa do tego następującego algorytmu:**

```
dopóki K > 0
  jeżeli K jest równe 1, to odpowiedz, że kwoty nie da się wydać
  x <- największy nominał ze zbioru {2, 5, 6}, który nie przekracza K
  wydaj monetę o nominale x
  zmniejsz K o x
```

Sprzedawca chciałby wydać jak najmniej monet. Jaka jest najmniejsza kwota K, dla której algorytm się pomyli (użyje więcej monet niż trzeba, albo błędnie odpowie, że wydanie jest niemożliwe)?

22. **W Bajtocji w użyciu są monety i banknoty o następujących nominałach: $[1, 2, 3, 5, 14, 19, 100]$. Jaka jest najmniejsza kwota, której nie można wydać mając po jednej sztuce każdego z tych nominałów?**

23. **W Bajtocji w użyciu są monety i banknoty o następujących nominałach: $[1, 2, 3, 4, 13, 15, 17, 60]$. Jaka jest najmniejsza kwota, której nie można wydać mając po jednej sztuce każdego z tych nominałów?**

24. **W Bajtocji w użyciu są monety i banknoty o następujących nominałach: $[1, 2, 3, 5, 8, 18, 43, 89, 350]$. Jaka jest najmniejsza kwota, której nie można wydać mając po jednej sztuce każdego z tych nominałów?**

25. **Jaka jest największa kwota, której nie można wydać mając do dyspozycji jedynie monety o nominałach pięcio- i siedmiobajtalarowych? (dowolnie wiele monet z każdego nominału)**

26. **Jaka jest największa kwota, której nie można wydać mając do dyspozycji jedynie monety o nominałach sześcio- i jedenastobajtalarowych? (dowolnie wiele monet z każdego nominału)**

27. **Na ile sposobów możliwe jest zapisanie liczby 4 w postaci sumy dwóch lub więcej dodatnich liczb całkowitych? Sposoby różniące się jedynie kolejnością składników sumy liczymy tylko jeden raz (np. $1 + 3$ to ten sam sposób co $3 + 1$).**

28. **Na ile sposobów możliwe jest zapisanie liczby 5 w postaci sumy dwóch lub więcej dodatnich liczb całkowitych? Sposoby różniące się jedynie kolejnością składników sumy liczymy tylko jeden raz (np. $1 + 4$ to ten sam sposób co $4 + 1$).**

29. **Na ile sposobów możliwe jest zapisanie liczby 6 w postaci sumy dwóch lub więcej dodatnich liczb całkowitych? Sposoby różniące się jedynie kolejnością składników sumy liczymy tylko jeden raz (np. $1 + 5$ to ten sam sposób co $5 + 1$).**

30. **Bajtazar ma karty, na których zapisane są liczby naturalne. Kolejne karty Bajtazara mają zapisane następujące liczby: $[30, 17, 24, 11, 35, 32, 19, 29, 48, 15, 14, 76, 4]$. Na ile sposobów można wybrać z kart Bajtazara parę (dwie różne karty) o sumie liczb równej dokładnie 59? Nie rozróżniamy kolejności kart w parze, np. para $(30, 17)$ to to samo, co $(17, 30)$.**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

31. **Bajtazar ma karty, na których zapisane są liczby naturalne. Kolejne karty Bajtazara mają zapisane następujące liczby: $[32, 17, 13, 36, 10, 47, 28, 43, 19, 1, 9]$. Na ile sposobów można wybrać z kart Bajtazara parę (dwie różne karty) o sumie liczb równej dokładnie 45? Nie rozróżniamy kolejności kart w parze, np. para $(32, 17)$ to to samo, co $(17, 32)$.**

32. **Bajtazar ma karty, na których zapisane są liczby naturalne. Kolejne karty Bajtazara mają zapisane następujące liczby: $[12, 18, 30, 25, 51, 17, 29, 14, 9, 38]$. Na ile sposobów można wybrać z kart Bajtazara parę dokładnie dwóch kart o sumie liczb co najmniej 58? Nie rozróżniamy kolejności kart w parze, np. para $(30, 17)$ to to samo, co $(17, 30)$.**

33. **Bajtazar ma karty, na których zapisane są liczby naturalne. Kolejne karty Bajtazara mają zapisane następujące liczby: $[15, 30, 29, 14, 9, 40, 17, 12, 25, 19]$. Na ile sposobów można wybrać z kart Bajtazara parę dokładnie dwóch kart o sumie liczb równej co najwyżej 42? Nie rozróżniamy kolejności kart w parze, np. para $(30, 17)$ to to samo, co $(17, 30)$.**

34. **Bajtazar napisał na kartce tabliczkę mnożenia do dziesięciu - tzn. tabelkę 10×10, w której w i-tym wierszu i j-tej kolumnie znajduje się $i \cdot j$ (wiersze i kolumny numerujemy od 1 do 10 włącznie). Jaka jest siódma największa spośród stu napisanych przez niego liczb (niektóre z tych stu liczb się powtarzają, liczymy je wielokrotnie)?**

35. **Bajtazar ma zbiór liczb: $[1, 3, 5, 8, 20]$. Postanowił napisać na kartce wszystkie sumy dwóch elementów z tego zbioru ($2 = 1 + 1, 4 = 1 + 3, 4 = 3 + 1, \ldots$) - takich sum jest 25, powtarzające się Bajtazar napisał kilka razy. Jeśli Bajtazar zapisze swoje liczby w kolejności rosnącej, jaki będzie trzynasty napisany przez niego element?**

36. **Ciąg nawiasów `(` i `)` nazywamy poprawnym nawiasowaniem, jeśli jest możliwe wstawienie do niego znaków 1 oraz $+$, aby uzyskać prawidłowe działanie matematyczne. Na przykład: `()(())` oraz `(()()(()()))` są poprawnymi nawiasowaniami, ale `)(`, `(()))` oraz `((()` nie są. Istnieją jedynie dwa poprawne nawiasowania o długości 4: `(())` oraz `()()`. Ile jest poprawnych nawiasowań o długości 6?**

37. **Ciąg nawiasów `(` i `)` nazywamy poprawnym nawiasowaniem, jeśli jest możliwe wstawienie do niego znaków 1 oraz $+$, aby uzyskać prawidłowe działanie matematyczne. Na przykład: `()(())` oraz `(()()(()()))` są poprawnymi nawiasowaniami, ale `)(`, `(()))` oraz `((()` nie są. Istnieją jedynie dwa poprawne nawiasowania o długości 4: `(())` oraz `()()`. Ile jest poprawnych nawiasowań o długości 8?**

38. **Ciąg nawiasów `(` i `)` nazywamy poprawnym nawiasowaniem, jeśli jest możliwe wstawienie do niego znaków 1 oraz $+$, aby uzyskać prawidłowe działanie matematyczne. Na przykład: `()(())` oraz `(()()(()()))` są poprawnymi nawiasowaniami, ale `)(`, `(()))` oraz `((()` nie są. Porównując alfabetycznie dwa różne ciągi nawiasów, mówimy że wcześniejsze jest to, które na pierwszej różniącej je pozycji ma nawias otwierający. Wszystkie poprawne nawiasowania długości 6 w kolejności alfabetycznej to: `((()))`, `(()())`, `(())()`, `()(())` oraz `()()()`. Jakie jest drugie w kolejności alfabetycznej poprawne nawiasowanie długości 8?**

39. **Ciąg nawiasów `(` i `)` nazywamy poprawnym nawiasowaniem, jeśli jest możliwe wstawienie do niego znaków 1 oraz $+$, aby uzyskać prawidłowe działanie matematyczne. Na przykład: `()(())` oraz `(()()(()()))` są poprawnymi nawiasowaniami, ale `)(`, `(()))` oraz `((()` nie są. Porównując alfabetycznie dwa różne ciągi nawiasów, mówimy że wcześniejsze jest to, które na pierwszej różniącej je pozycji ma nawias otwierający. Wszystkie poprawne nawiasowania długości 6 w kolejności alfabetycznej to: `((()))`, `(()())`, `(())()`, `()(())` oraz `()()()`. Jakie jest piąte w kolejności alfabetycznej poprawne nawiasowanie długości 8?**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

40. **Ciąg nawiasów** `(` **i** `)` **nazywamy poprawnym nawiasowaniem, jeśli jest możliwe wstawienie do niego znaków** `1` **oraz** `+`**, aby uzyskać prawidłowe działanie matematyczne. Na przykład:** `()(())` **oraz** `(()()(()()))` **są poprawnymi nawiasowaniami, ale** `)(`**,** `(()))` **oraz** `((())` **nie są. Na ile sposobów można wybrać niepusty spójny fragment (bez dziur) napisu** `)(()()()())(` **żeby uzyskać poprawne nawiasowanie? Dwa sposoby uznajemy za różne, jeśli różnią się wybraną pozycją początku lub końca. Na przykład** `()` **powinniśmy zliczyć 4 razy.**

41. **Ciąg nawiasów** `(` **i** `)` **nazywamy poprawnym nawiasowaniem, jeśli jest możliwe wstawienie do niego znaków** `1` **oraz** `+`**, aby uzyskać prawidłowe działanie matematyczne. Na przykład:** `()(())` **oraz** `(()()(()()))` **są poprawnymi nawiasowaniami, ale** `)(`**,** `(()))` **oraz** `((())` **nie są. Ile różnych poprawnych nawiasowań możemy uzyskać wybierając niepusty spójny fragment (bez dziur) napisu** `)(()()()())(` **? Jeśli nawiasowania różnią się jedynie wybraną pozycją początku lub końca, ale stanowią dokładnie ten sam ciąg, zliczamy je jedynie jeden raz. Na przykład** `()` **powinniśmy zliczyć jeden raz, a nie cztery razy.**

42. **Wprowadzamy nową metodę zapisywania słów - na przykład zamiast** `aaaaa` **będziemy pisać** `5a`**. Ogólnie** `<liczba><znak>` **będzie oznaczało** `<znak>` **powtórzony** `<liczba>` **razy, przy czym zakładamy, że** `<liczba>` **ma być równa co najmniej 3. Dla danego słowa szukamy najkrótszego możliwego takiego zapisu. Przykładowo, słowo** `aaabbbbcddddee` **zostanie skrócone do** `3a4bc4dee`**. Jak będzie wyglądał skompresowany napis** `aaabccabbbbb`**?**

43. **Niech** `<liczba>[<napis>]` **oznacza** `<napis>` **napisany** `<liczba>` **razy obok siebie: na przykład** `3[ab]` **oznacza** `ababab`**. Napis** `aaaaabaaaaabaaaaabccccc` **można na przykład skrócić do** `3[5[a]b]5[c]`**. Do jakiej najkrótszej formy (każdy znak ma znaczenie) można skrócić w ten sposób napis:** `aaaaaabaaabaaabaaaaa` **(zwróć uwagę na liczbę liter** `a` **pomiędzy literami** `b`**)**

44. **Niech** `<liczba>[<napis>]` **oznacza** `<napis>` **napisany** `<liczba>` **razy obok siebie: na przykład** `3[ab]` **oznacza** `ababab`**. Napis** `aaaaabaaaaabaaaaabccccc` **można na przykład skrócić do** `3[5[a]b]5[c]`**. Do jakiej najkrótszej formy (każdy znak ma znaczenie) można skrócić w ten sposób napis:** `abxyxyxybxyxyxyd`**?**

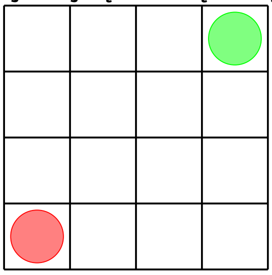
45. **Niech** `<liczba>[<napis>]` **oznacza** `<napis>` **napisany** `<liczba>` **razy obok siebie: na przykład** `3[ab]` **oznacza** `ababab`**. Napis** `aaaaabaaaaabaaaaabccccc` **można na przykład skrócić do** `3[5[a]b]5[c]`**. Do jakiej najkrótszej formy (każdy znak ma znaczenie) można skrócić w ten sposób napis:** `abcccccbcccccabcccccbccccc`**?**

46. **Niech** `<liczba>[<napis>]` **oznacza** `<napis>` **napisany** `<liczba>` **razy obok siebie: na przykład** `3[ab]` **oznacza** `ababab`**. Napis** `aaaaabaaaaabaaaaabccccc` **można na przykład skrócić do** `3[5[a]b]5[c]`**. Jaka była oryginalna (nieskrócona) forma napisu** `2[d3[ab]c]3[a]`**?**

47. **Niech** `<liczba>[<napis>]` **oznacza** `<napis>` **napisany** `<liczba>` **razy obok siebie: na przykład** `3[ab]` **oznacza** `ababab`**. Napis** `aaaaabaaaaabaaaaabccccc` **można na przykład skrócić do** `3[5[a]b]5[c]`**. Jaka była oryginalna (nieskrócona forma) napisu** `d2[xy3[ab]o]`**?**

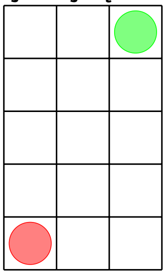
Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

48. **Rozważmy planszę na obrazku poniżej. Chcemy przedostać się z pola startowego (czerwone) do pola końcowego (zielone). W jednym ruchu można przesunąć się o jedno pole w górę, dół, lewo lub prawo. Musimy wykonać najmniejszą możliwą liczbę ruchów. Ile jest różnych dróg, które na to pozwolą?**



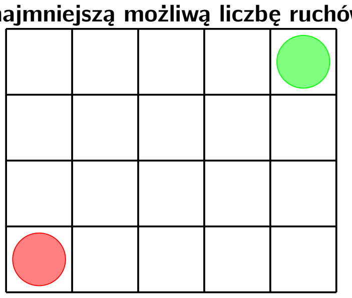
Plansza

49. **Rozważmy planszę na obrazku poniżej. Chcemy przedostać się z pola startowego (czerwone) do pola końcowego (zielone). W jednym ruchu można przesunąć się o jedno pole w górę, dół, lewo lub prawo. Musimy wykonać najmniejszą możliwą liczbę ruchów. Ile jest różnych dróg, które na to pozwolą?**



Plansza

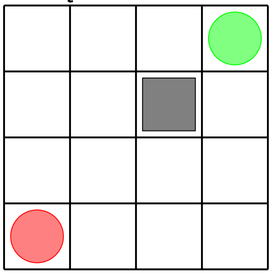
50. **Rozważmy planszę na obrazku poniżej. Chcemy przedostać się z pola startowego (czerwone) do pola końcowego (zielone). W jednym ruchu można przesunąć się o jedno pole w górę, dół, lewo lub prawo. Musimy wykonać najmniejszą możliwą liczbę ruchów. Ile jest różnych dróg, które na to pozwolą?**



Plansza

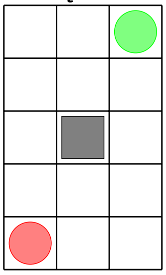
Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

51. **Rozważmy planszę na obrazku poniżej. Chcemy przedostać się z pola startowego (czerwone) do pola końcowego (zielone), nie przechodząc przez pola zablokowane (szare). W jednym ruchu można przesunąć się o jedno pole w górę, dół, lewo lub prawo. Musimy wykonać najmniejszą możliwą liczbę ruchów. Ile jest różnych dróg, które na to pozwolą?**



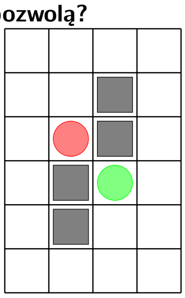
Plansza

52. **Rozważmy planszę na obrazku poniżej. Chcemy przedostać się z pola startowego (czerwone) do pola końcowego (zielone), nie przechodząc przez pola zablokowane (szare). W jednym ruchu można przesunąć się o jedno pole w górę, dół, lewo lub prawo. Musimy wykonać najmniejszą możliwą liczbę ruchów. Ile jest różnych dróg, które na to pozwolą?**



Plansza

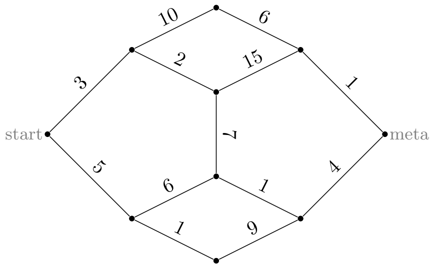
53. **Rozważmy planszę na obrazku poniżej. Chcemy przedostać się z pola startowego (czerwone) do pola końcowego (zielone), nie przechodząc przez pola zablokowane (szare). W jednym ruchu można przesunąć się o jedno pole w górę, dół, lewo lub prawo. Musimy wykonać najmniejszą możliwą liczbę ruchów. Ile jest różnych dróg, które na to pozwolą?**



Plansza

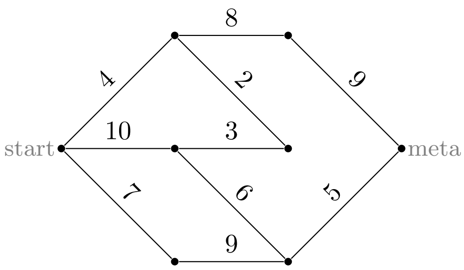
Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

54. **Bajtazar bierze udział w wyścigu rowerowym. Schemat dróg pomiędzy startem i metą znajduje się poniżej. Liczby przy krawędziach oznaczają czas (w minutach), który jest potrzebny Bajtazarowi na pokonanie danej drogi. Ile najmniej czasu może zająć Bajtazarowi przejazd ze startu do mety?**



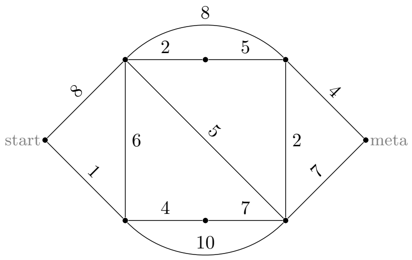
Schemat dróg

55. **Bajtazar bierze udział w wyścigu rowerowym. Schemat dróg pomiędzy startem i metą znajduje się poniżej. Liczby przy krawędziach oznaczają czas (w minutach), który jest potrzebny Bajtazarowi na pokonanie danej drogi. Ile czasu najmniej może zająć Bajtazarowi przejazd ze startu do mety?**



Schemat dróg

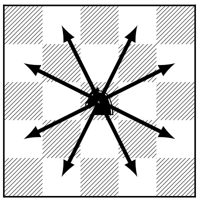
56. **Bajtazar bierze udział w wyścigu rowerowym. Schemat dróg pomiędzy startem i metą znajduje się poniżej. Liczby przy krawędziach oznaczają czas (w minutach), który jest potrzebny Bajtazarowi na pokonanie danej drogi. Ile czasu najmniej może zająć Bajtazarowi przejazd ze startu do mety?**



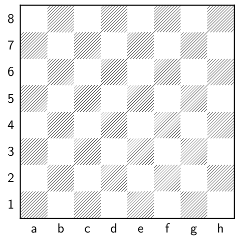
Schemat dróg

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

57. **Skoczek szachowy porusza się w jednym z ośmiu kierunków zgodnie z rysunkiem po lewej stronie. Pola szachownicy oznaczane są zgodnie z rysunkiem po prawej stronie. Na przykład pole `a1` znajduje się w lewym dolnym rogu, a pole `h8` w prawym górnym rogu szachownicy. Ile minimalnie ruchów potrzebuje skoczek szachowy, aby przedostać się z pola `a1` na pole `a2`?**

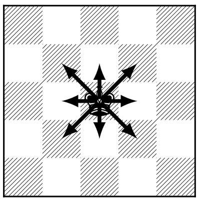


Ruchy skoczka szachowego

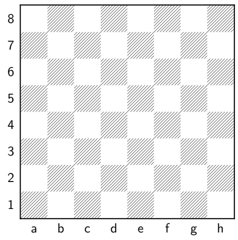


Pola szachownicy

58. **Król szachowy porusza się w jednym z ośmiu kierunków zgodnie z rysunkiem po lewej stronie. Pola szachownicy oznaczane są zgodnie z rysunkiem po prawej stronie. Na przykład pole `a1` znajduje się w lewym dolnym rogu, a pole `h8` w prawym górnym rogu szachownicy. Ile minimalnie ruchów potrzebuje król szachowy, aby przedostać się z pola `a1` na pole `h6`?**

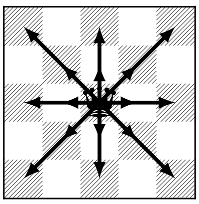


Ruchy króla szachowego

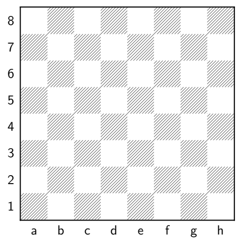


Pola szachownicy

59. **Hetman szachowy atakuje wszystkie figury znajdujące się w tym samym wierszu, kolumnie lub na tej samej przekątnej, zgodnie z rysunkiem po lewej stronie. Pola szachownicy oznaczane są zgodnie z rysunkiem po prawej stronie. Ile najwięcej pól szachownicy może być atakowanych przez jednego hetmana (wliczając również pole, na którym stanie hetman)?**



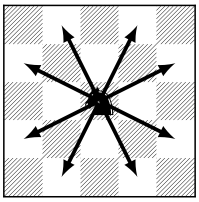
Ruchy hetmana szachowego



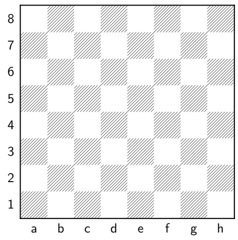
Pola szachownicy

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

60. **Skoczek szachowy atakuje w jednym z ośmiu kierunków zgodnie z rysunkiem po lewej stronie. Pola szachownicy oznaczane są zgodnie z rysunkiem po prawej stronie. Na przykład pole** `a1` **znajduje się w lewym dolnym rogu, a pole** `h8` **w prawym górnym rogu szachownicy. Ile najwięcej skoczków szachowych można umieścić na szachownicy, aby żadne dwa nie atakowały się wzajemnie?**

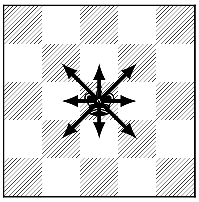


Ruchy skoczka szachowego

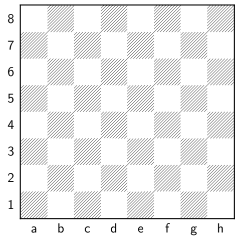


Pola szachownicy

61. **Król szachowy atakuje w jednym z ośmiu kierunków zgodnie z rysunkiem po lewej stronie. Pola szachownicy oznaczane są zgodnie z rysunkiem po prawej stronie. Na przykład pole** `a1` **znajduje się w lewym dolnym rogu, a pole** `h8` **w prawym górnym rogu szachownicy. Ile najwięcej króli szachowych można umieścić na szachownicy, aby żadne dwa nie atakowały się wzajemnie?**



Ruchy króla szachowego



Pola szachownicy

62. **W poniższym ciągu należy zakryć niektóre jego elementy, aby pozostałe (niezakryte) stanowiły ciąg rosnący:** $[3, 1, 5, 4, 9, 8, 2, 7, 6]$. **Ile najwięcej elementów może pozostać niezakrytych w powstałym ciągu?**

63. **W poniższym ciągu należy zakryć niektóre jego, aby pozostałe (niezakryte) stanowiły ciąg rosnący:** $[4, 2, 9, 5, 3, 6, 1, 8, 7]$. **Ile najwięcej elementów może pozostać niezakrytych w powstałym ciągu?**

64. **W poniższym ciągu należy wybrać dokładnie trzy elementy, aby czytane od lewej do prawej stanowiły ciąg rosnący:** $[3, 1, 5, 4, 9, 8, 2, 7, 6]$. **Na ile sposobów można wybrać te trzy elementy?**

65. **W poniższym ciągu należy wybrać dokładnie trzy elementy, aby czytane od lewej do prawej stanowiły ciąg rosnący:** $[4, 2, 9, 5, 3, 6, 1, 8, 7]$. **Na ile sposobów można wybrać te trzy elementy? Sposoby uznajemy za różne jeśli zbiory wybranych liczb są różne.**

66. **Podciągiem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać poprzez zakrycie niektórych jego liter (być może wszystkich, a być może żadnej). Na przykład: podciągami słowa** `abc` **są puste słowo,** `a`, `b`, `c`, `ab`, `ac`, `bc` **oraz** `abc`. **Słowa, które są takie same, ale można je uzyskać zakrywając różne pozycje liczymy jedynie jeden raz - na przykład** `aaa` **ma tylko cztery podciągi (słowo puste,** `a`, `aa` **i** `aaa`**). Ile jest różnych podciągów słowa** `baaaaab`**?**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

67. **Podciągiem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać poprzez zakrycie niektórych jego liter (być może wszystkich, a być może żadnej). Na przykład: podciągami słowa** `abc` **są puste słowo,** `a`**,** `b`**,** `c`**,** `ab`**,** `ac`**,** `bc` **oraz** `abc`**. Ile jest różnych podciągów słowa** `abcddd`**? Słowa, które są takie same, ale można je uzyskać zakrywając różne pozycje liczymy jedynie jeden raz.**

68. **Elementy** $\{1,1,2\}$ **można ustawić w ciąg na trzy różne sposoby:** $(1,1,2)$**,** $(1,2,1)$ **oraz** $(2,1,1)$**. Na ile różnych sposobów można ustawić w ciąg elementy** $\{1,2,3,4\}$**?**

69. **Elementy** $\{1,1,2\}$ **można ustawić w ciąg na trzy różne sposoby:** $(1,1,2)$**,** $(1,2,1)$ **oraz** $(2,1,1)$**. Na ile różnych sposobów można ustawić w ciąg elementy** $\{1,1,2,2\}$**?**

70. **Elementy** $\{1,1,2\}$ **można ustawić w ciąg na trzy różne sposoby:** $(1,1,2)$**,** $(1,2,1)$ **oraz** $(2,1,1)$**. Na ile różnych sposobów można ustawić w ciąg elementy** $\{1,1,2,2,3\}$**?**

71. **Elementy** $\{1,1,2\}$ **można ustawić w ciąg na trzy różne sposoby:** $(1,1,2)$**,** $(1,2,1)$ **oraz** $(2,1,1)$**. Na ile różnych sposobów można ustawić w ciąg elementy** $\{1,2,2,3,3,3\}$**?**

72. **Anagramem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać ustawiając wszystkie jego litery w dowolnej kolejności. Na przykład, istnieją trzy anagramy słowa** `aab`**, są to:** `aab`**,** `aba` **oraz** `baa`**. Ile najmniej liter może mieć słowo, dla którego istnieje dokładnie 12 anagramów? Wielokrotne wystąpienia tej samej litery liczymy wielokrotnie.**

73. **Anagramem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać ustawiając wszystkie jego litery w dowolnej kolejności. Na przykład, istnieją trzy anagramy słowa** `aab`**, są to:** `aab`**,** `aba` **oraz** `baa`**. Ile najmniej liter może mieć słowo, dla którego istnieje dokładnie 60 anagramów? Wielokrotne wystąpienia tej samej litery liczymy wielokrotnie.**

74. **Anagramem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać ustawiając wszystkie jego litery w dowolnej kolejności. Na przykład, istnieją trzy anagramy słowa** `aab`**, są to:** `aab`**,** `aba` **oraz** `baa`**. Ile najmniej liter może mieć słowo, dla którego istnieje dokładnie 35 anagramów? Wielokrotne wystąpienia tej samej litery liczymy wielokrotnie.**

75. **Anagramem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać ustawiając wszystkie jego litery w dowolnej kolejności. Na przykład, istnieją trzy anagramy słowa** `aab`**, są to:** `aab`**,** `aba` **oraz** `baa`**. Ile najmniej liter może mieć słowo, dla którego istnieje dokładnie 120 anagramów? Wielokrotne wystąpienia tej samej litery liczymy wielokrotnie.**

76. **Liczbę** x **nazywamy dzielnikiem liczby** y**, jeśli jest możliwe podzielenie** y **przez** x **bez reszty. Na przykład, wszystkie dzielniki liczby 12 to: 1, 2, 3, 4, 6 oraz 12. Ile dzielników ma liczba 200?**

77. **Liczbę** x **nazywamy dzielnikiem liczby** y**, jeśli jest możliwe podzielenie** y **przez** x **bez reszty. Na przykład, wszystkie dzielniki liczby 12 to: 1, 2, 3, 4, 6 oraz 12. Ile dzielników ma liczba 210?**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

78. **Liczbę x nazywamy dzielnikiem liczby y, jeśli jest możliwe podzielenie y przez x bez reszty. Na przykład, wszystkie dzielniki liczby 12 to: 1, 2, 3, 4, 6 oraz 12. Ile spośród liczb naturalnych od 1 do 1000 włącznie ma nieparzystą liczbę dzielników?**

79. **Liczbę x nazywamy dzielnikiem liczby y, jeśli jest możliwe podzielenie y przez x bez reszty. Na przykład, wszystkie dzielniki liczby 12 to: 1, 2, 3, 4, 6 oraz 12. Ile spośród liczb naturalnych od 1 do 100 włącznie ma parzystą liczbę dzielników?**

80. **Liczbę x nazywamy dzielnikiem liczby y, jeśli jest możliwe podzielenie y przez x bez reszty. Na przykład, wszystkie dzielniki liczby 12 to: 1, 2, 3, 4, 6 oraz 12. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna, która ma dokładnie 12 dzielników?**

81. **Liczbę x nazywamy dzielnikiem liczby y, jeśli jest możliwe podzielenie y przez x bez reszty. Na przykład, wszystkie dzielniki liczby 12 to: 1, 2, 3, 4, 6 oraz 12. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna, która ma dokładnie 16 dzielników?**

82. **Liczbę x nazywamy dzielnikiem liczby y, jeśli jest możliwe podzielenie y przez x bez reszty. Na przykład, wszystkie dzielniki liczby 12 to: 1, 2, 3, 4, 6 oraz 12. Ile spośród liczb naturalnych od 1 do 200 ma dokładnie 10 dzielników?**

83. **Liczbę x nazywamy dzielnikiem liczby y, jeśli jest możliwe podzielenie y przez x bez reszty. Na przykład, wszystkie dzielniki liczby 12 to: 1, 2, 3, 4, 6 oraz 12. Ile spośród liczb naturalnych od 1 do 100 ma dokładnie 8 dzielników?**

84. **Jaka jest najmniejsza liczba naturalna, która ma tyle samo jedynek w systemie dwójkowym, co liczba dziesiątkowa 20 zapisana w systemie dwójkowym? Odpowiedź podaj w systemie dziesiątkowym.**

85. **Jaka jest najmniejsza liczba naturalna, która ma dokładnie pięć jedynek w systemie dwójkowym? Odpowiedź podaj w systemie dziesiątkowym.**

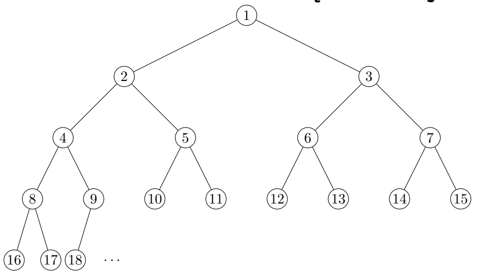
86. **Jaka jest najmniejsza liczba naturalna, która ma dokładnie 5 jedynek w systemie dwójkowym oraz jednocześnie dokładnie 3 zera w tym systemie? Zera wiodące (na początku liczby) nie są dozwolone. Odpowiedź podaj w systemie dziesiątkowym.**

87. **Ile spośród liczb naturalnych od 1 do 50 włącznie ma dokładnie dwie jedynki w zapisie dwójkowym? Odpowiedź podaj w systemie dziesiątkowym.**

88. **Ile spośród liczb naturalnych od 1 do 40 włącznie ma dokładnie dwie jedynki w zapisie dwójkowym? Odpowiedź podaj w systemie dziesiątkowym.**

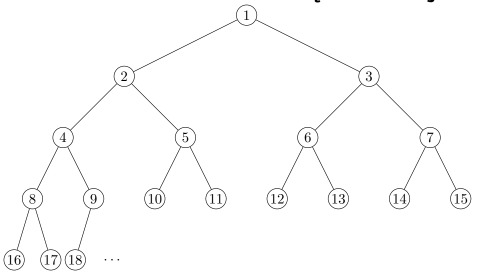
Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

89. **Rozważmy drzewo binarne o numeracji węzłów jak na rysunku poniżej. Zwróć uwagę, że drzewo ma więcej niż 18 węzłów. Przykładowo, najkrótsza ścieżka między węzłami numer 8 oraz 5 ma trzy krawędzie i przebiega przez wierzchołki 4 oraz 2. Ile krawędzi ma najkrótsza ścieżka między węzłami numer 40 i 57?**



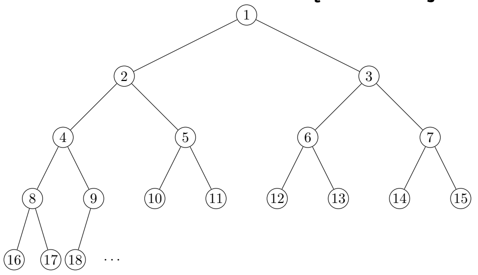
Drzewo binarne

90. **Rozważmy drzewo binarne o numeracji węzłów jak na rysunku poniżej. Zwróć uwagę, że drzewo ma więcej niż 18 węzłów. Przykładowo, najkrótsza ścieżka między węzłami numer 8 oraz 5 ma trzy krawędzie i przebiega przez wierzchołki 4 oraz 2. Ile krawędzi ma najkrótsza ścieżka między węzłami numer 52 i 60?**



Drzewo binarne

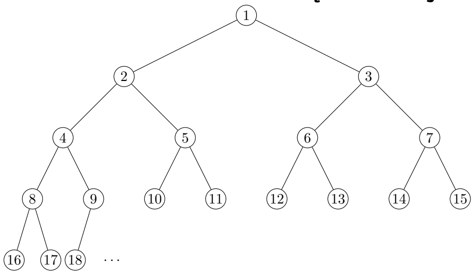
91. **Rozważmy drzewo binarne o numeracji węzłów jak na rysunku poniżej. Zwróć uwagę, że drzewo ma więcej niż 18 węzłów. Przykładowo, najkrótsza ścieżka między węzłami numer 8 oraz 5 ma trzy krawędzie i przebiega przez wierzchołki 4 oraz 2. Ile krawędzi ma najkrótsza ścieżka między węzłami numer 25 i 59?**



Drzewo binarne

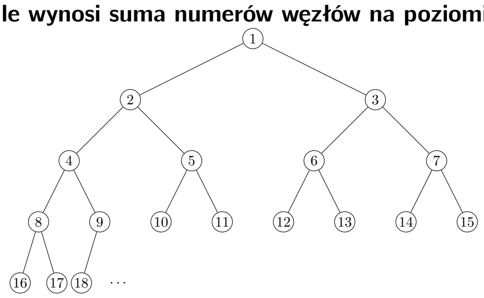
Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

92. **Rozważmy drzewo binarne o numeracji węzłów jak na rysunku poniżej. Zwróć uwagę, że drzewo ma więcej niż 18 węzłów. Przykładowo, najkrótsza ścieżka między węzłami numer 8 oraz 5 ma trzy krawędzie i przebiega przez wierzchołki 4 oraz 2. Ile krawędzi ma najkrótsza ścieżka między węzłami numer 7 i 63?**



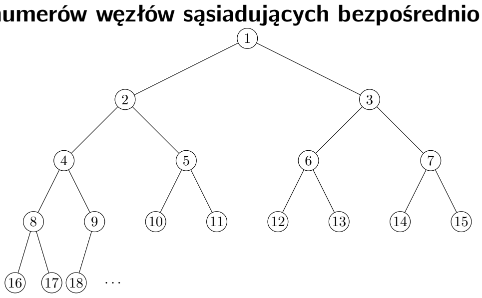
Drzewo binarne

93. **Rozważmy drzewo binarne o numeracji węzłów jak na rysunku poniżej. Zwróć uwagę, że drzewo ma więcej niż 18 węzłów. Węzeł numer 1 znajduje się na poziomie pierwszym, węzły numer 2 i 3 na poziomie drugim i tak dalej. Ile wynosi suma numerów węzłów na poziomie piątym?**



Drzewo binarne

94. **Rozważmy drzewo binarne o numeracji węzłów jak na rysunku poniżej. Zwróć uwagę, że drzewo ma więcej niż 18 węzłów. Przykładowo, węzły sąsiadujące bezpośrednio z węzłem 5 mają numery: 2, 10 oraz 11. Ile wynosi suma numerów węzłów sąsiadujących bezpośrednio z węzłem 42?**



Drzewo binarne

95. **W szufladzie znajduje się po $X[i]$ skarpetek wzoru o numerze i. Na przykład, gdyby $X = [1, 2, 3]$, to w szufladzie jest jedna skarpetka wzoru o numerze 1 (np. w paski), dwie skarpetki wzoru o numerze 2 (np. w kropki) oraz trzy skarpetki wzoru o numerze 3 (np. w kratkę). Niech $X = [2, 2, 2, 2, 2]$. Ile skarpetek musimy wyciągnąć z szuflady, aby mieć pewność, że niezależnie od tego, które skarpetki zostaną wyciągnięte, wyciągniemy co najmniej jedną parę skarpetek o takim samym wzorze?**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

96. **W szufladzie znajduje się po $X[i]$ skarpetek wzoru o numerze i. Na przykład, gdyby $X = [1, 2, 3]$, to w szufladzie jest jedna skarpetka wzoru o numerze 1 (np. w paski), dwie skarpetki wzoru o numerze 2 (np. w kropki) oraz trzy skarpetki wzoru o numerze 3 (np. w kratkę). Niech $X = [1, 1, 1, 2, 5, 1, 3]$. Ile skarpetek musimy wyciągnąć z szuflady, aby mieć pewność, że niezależnie od tego, które skarpetki zostaną wyciągnięte, wyciągniemy co najmniej jedną parę skarpetek o takim samym wzorze?**

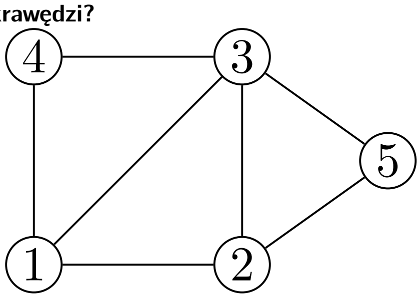
97. **W szufladzie znajduje się po $X[i]$ skarpetek wzoru o numerze i. Na przykład, gdyby $X = [1, 2, 3]$, to w szufladzie jest jedna skarpetka wzoru o numerze 1 (np. w paski), dwie skarpetki wzoru o numerze 2 (np. w kropki) oraz trzy skarpetki wzoru o numerze 3 (np. w kratkę). Niech $X = [1, 1, 1, 2, 5, 1, 3]$. Ile skarpetek musimy wyciągnąć z szuflady, aby mieć pewność, że niezależnie od tego, które skarpetki zostaną wyciągnięte, wyciągniemy co najmniej dwie pary skarpetek o takim samym wzorze? Skarpetki w parze muszą mieć takie same wzory, ale pary nie muszą mieć tych samych wzorów.**

98. **W szufladzie znajduje się po $X[i]$ skarpetek wzoru o numerze i. Na przykład, gdyby $X = [1, 2, 3]$, to w szufladzie jest jedna skarpetka wzoru o numerze 1 (np. w paski), dwie skarpetki wzoru o numerze 2 (np. w kropki) oraz trzy skarpetki wzoru o numerze 3 (np. w kratkę). Niech $X = [7, 2, 1, 8]$. Ile skarpetek musimy wyciągnąć z szuflady, aby mieć pewność, że niezależnie od tego, które skarpetki zostaną wyciągnięte, wyciągniemy co najmniej dwie pary skarpetek o takim samym wzorze? Skarpetki w parze muszą mieć takie same wzory, ale pary nie muszą mieć tych samych wzorów.**

99. **Dysponujemy wagą szalkową i po jednym odważniku o masie ze zbioru $\{2, 5, 13, 9\}$. Na lewej szalce wagi jest przedmiot o masie 17. Ile minimalnie odważników należy położyć na wagę, żeby waga była w równowadze? Odważniki można kłaść na obu szalkach wagi.**

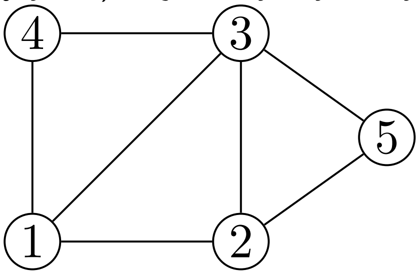
100. **Dysponujemy wagą szalkową i po jednym odważniku o masie ze zbioru $\{1, 3, 9, 27, 81\}$. Na lewej szalce wagi jest przedmiot o masie 100. Ile minimalnie odważników należy położyć na wagę, żeby waga była w równowadze? Odważniki można kłaść na obu szalkach wagi.**

101. **Graf to zbiór wierzchołków połączonych krawędziami, jak na poniższym rysunku. Gdyby narysować graf o dziesięciu wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek ma połączenie krawędzią z trzema innymi, ile byłoby wszystkich krawędzi?**



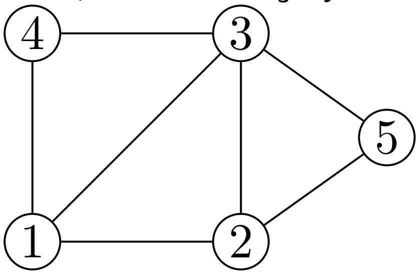
Przykładowy graf

102. **Graf to zbiór wierzchołków połączonych krawędziami, jak na poniższym rysunku. Cykl to droga w grafie, która wychodzi z pewnego wierzchołka, przechodzi wzdłuż kilku krawędzi i wraca z powrotem do tego samego wierzchołka tak, aby żadnego wierzchołka po drodze nie odwiedzić dwukrotnie (na przykład $1{-}2{-}3{-}1$, albo $1{-}4{-}3{-}2{-}1$ są cyklami). Ile jest różnych cykli na rysunku?**



Graf

103. **Graf to zbiór wierzchołków oraz zbiór krawędzi pomiędzy nimi. Przykładowy graf pokazany jest na rysunku poniżej: Cykl to droga w grafie, która wychodzi z pewnego wierzchołka, przechodzi wzdłuż kilku krawędzi i wraca z powrotem do tego samego wierzchołka tak, aby żadnego wierzchołka po drodze nie odwiedzić dwukrotnie (na przykład na rysunku $1-2-3-1$, albo $1-4-3-2-1$ są cyklami). Chcemy narysować graf, który ma 10 wierzchołków, ale nie ma żadnego cyklu. Ile najwięcej krawędzi może mieć taki graf?**



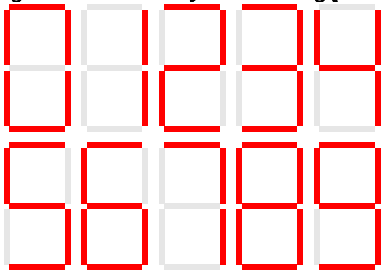
Przykładowy graf

104. **Ile jest różnych prostokątów o bokach o długościach całkowitych i polu równym 128? Dwa prostokąty uznajemy za różne, jeśli nie jest możliwe obrócenie ich tak, żeby do siebie przystawały.**

105. **Palindromem nazywamy napis, który czytany od końca jest taki sam jak czytany od początku, na przykład:** `anna` **albo** `kajak`**. Ile najmniej liter należy zamienić na inne w napisie** `alamakota`**, żeby uzyskać palindrom?**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

106. **Rozważmy wyświetlacz siedmiosegmentowy, popularny w zegarkach, kuchenkach mikrofalowych, licznikach rowerowych i wielu innych. Każda cyfra może być uzyskana poprzez zapalenie lub zgaszenie jednego z siedmiu segmentów wyświetlacza. Wyświetlacz może wyświetlić dowolnie wiele cyfr, na każdą z nich przeznaczone jest osobne 7 segmentów. Najmniejszą liczbą jaką można wyświetlić zapalając dokładnie cztery segmenty wyświetlacza jest 4, a największa liczba to 11. Jaka jest najmniejsza liczba, którą można wyświetlić zapalając dokładnie 12 segmentów? Liczby te nie mogą mieć zer wiodących, tj. nadmiarowych zer z lewej strony.**



Cyfry na wyświetlaczu siedmiosegmentowym

107. **Rozważmy wyświetlacz siedmiosegmentowy, popularny w zegarkach, kuchenkach mikrofalowych, licznikach rowerowych i wielu innych. Każda cyfra może być uzyskana poprzez zapalenie lub zgaszenie jednego z siedmiu segmentów wyświetlacza. Wyświetlacz może wyświetlić dowolnie wiele cyfr, na każdą z nich przeznaczone jest osobne 7 segmentów. Najmniejszą liczbą jaką można wyświetlić zapalając dokładnie cztery segmenty wyświetlacza jest 4, a największa liczba to 11. Jaka jest najmniejsza liczba, którą można wyświetlić zapalając dokładnie 18 segmentów? Liczby te nie mogą mieć zer wiodących, tj. nadmiarowych zer z lewej strony.**

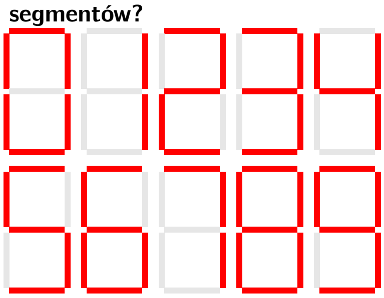
Cyfry na wyświetlaczu siedmiosegmentowym

108. **Rozważmy wyświetlacz siedmiosegmentowy, popularny w zegarkach, kuchenkach mikrofalowych, licznikach rowerowych i wielu innych. Każda cyfra może być uzyskana poprzez zapalenie lub zgaszenie jednego z siedmiu segmentów wyświetlacza. Wyświetlacz może wyświetlić dowolnie wiele cyfr, na każdą z nich przeznaczone jest osobne 7 segmentów. Najmniejszą liczbą jaką można wyświetlić zapalając dokładnie cztery segmenty wyświetlacza jest 4, a największa liczba to 11. Jaka jest najmniejsza liczba, którą można wyświetlić zapalając dokładnie 36 segmentów? Liczby te nie mogą mieć zer wiodących, tj. nadmiarowych zer z lewej strony.**

Cyfry na wyświetlaczu siedmiosegmentowym

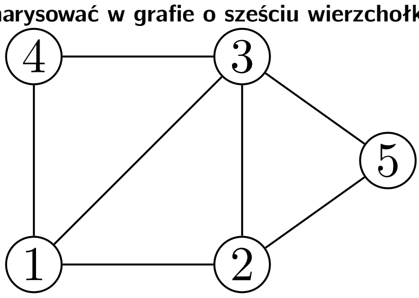
Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

109. **Rozważmy wyświetlacz siedmiosegmentowy, popularny w zegarkach, kuchenkach mikrofalowych, licznikach rowerowych i wielu innych. Każda cyfra może być uzyskana poprzez zapalenie lub zgaszenie jednego z siedmiu segmentów wyświetlacza. Wyświetlacz może wyświetlić dowolnie wiele cyfr, na każdą z nich przeznaczone jest osobne 7 segmentów. Najmniejszą liczbą jaką można wyświetlić zapalając dokładnie cztery segmenty wyświetlacza jest 4, a największa liczba to 11. Jaka jest największa liczba, którą można wyświetlić zapalając dokładnie 9 segmentów?**



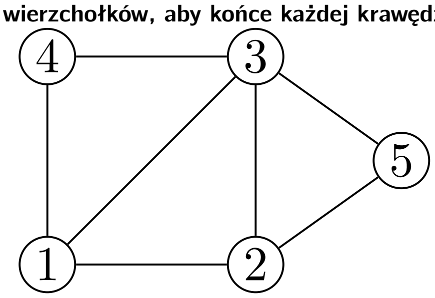
Cyfry na wyświetlaczu siedmiosegmentowym

110. **Graf to zbiór wierzchołków połączonych krawędziami, jak na poniższym rysunku. Ile najwięcej krawędzi można narysować w grafie o sześciu wierzchołkach tak, aby się nie przecinały?**

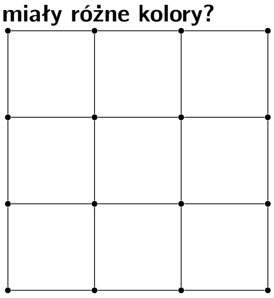


Przykładowy graf

111. **Graf to zbiór wierzchołków połączonych krawędziami, jak na rysunku po lewej stronie. Wierzchołki grafu chcemy pokolorować jak najmniejszą liczbą różnych kolorów, w taki sposób, żeby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią miały różne kolory. Na przykład, nie jest możliwe pokolorowanie grafu z rysunku dwoma kolorami, ale jest możliwe pokolorowanie trzema: wierzchołki 1 i 5 mogą dostać ten sam kolor, podobnie jak wierzchołki 2 i 4. Rozważmy graf pokazany po prawej stronie. Ile najmniej kolorów jest potrzebnych do pokolorowania jego wierzchołków, aby końce każdej krawędzi miały różne kolory?**



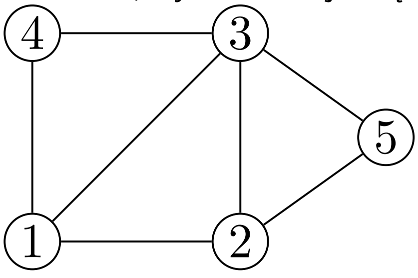
Przykładowy graf



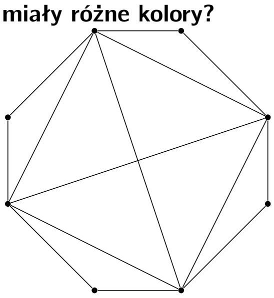
Graf do pokolorowania

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.

112. **Graf to zbiór wierzchołków połączonych krawędziami, jak na rysunku po lewej stronie. Wierzchołki grafu chcemy pokolorować jak najmniejszą liczbą różnych kolorów, w taki sposób, żeby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią miały różne kolory. Na przykład, nie jest możliwe pokolorowanie grafu z rysunku dwoma kolorami, ale jest możliwe pokolorowanie trzema: wierzchołki 1 i 5 mogą dostać ten sam kolor, podobnie jak wierzchołki 2 i 4. Rozważmy graf pokazany po prawej stronie. Ile najmniej kolorów jest potrzebnych do pokolorowania jego wierzchołków, aby końce każdej krawędzi miały różne kolory?**

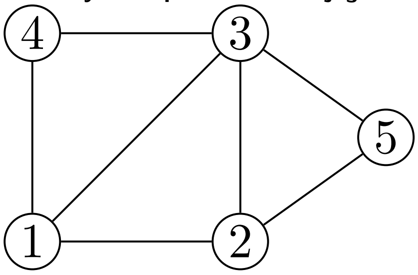


Przykładowy graf

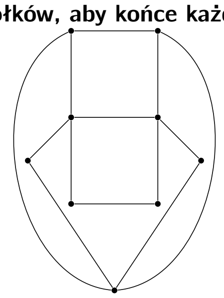


Graf do pokolorowania

113. **Graf to zbiór wierzchołków oraz zbiór krawędzi pomiędzy nimi. Przykładowy graf pokazany jest na rysunku po lewej stronie. Wierzchołki grafu chcemy pokolorować jak najmniejszą liczbą różnych kolorów, w taki sposób, żeby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią miały różne kolory. Na przykład, nie jest możliwe pokolorowanie grafu z rysunku dwoma kolorami, ale jest możliwe pokolorowanie trzema: wierzchołki 1 i 5 mogą dostać ten sam kolor, podobnie jak wierzchołki 2 i 4. Rozważmy graf pokazany poniżej, po prawej stronie. Ile najmniej kolorów jest potrzebnych do pokolorowania jego wierzchołków, aby końce każdej krawędzi miały różne kolory?**



Przykładowy graf



Graf do pokolorowania

114. **Anagramem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać ustawiając wszystkie jego litery w dowolnej kolejności. Na przykład, istnieją trzy anagramy słowa** `aab`**, są to:** `aab`, `aba` **oraz** `baa`**. Anagramy słowa można uporządkować w kolejności alfabetycznej. Porównując dwa słowa, wcześniej powinno być to, które na pierwszej różnicującej pozycji ma wcześniejszą literę alfabetu. Rozpatrzmy wszystkie anagramy słowa** `kajak`**. Jaki jest trzeci w kolejności alfabetycznej anagram tego słowa?**

115. **Anagramem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać ustawiając wszystkie jego litery w dowolnej kolejności. Na przykład, istnieją trzy anagramy słowa** `aab`**, są to:** `aab`, `aba` **oraz** `baa`**. Anagramy słowa można uporządkować w kolejności alfabetycznej. Porównując dwa słowa, wcześniej powinno być to, które na pierwszej różnicującej pozycji ma wcześniejszą literę alfabetu. Rozpatrzmy wszystkie anagramy słowa** `ojojoj`**. Jaki jest siódmy w kolejności alfabetycznej anagram tego słowa?**

116. **Anagramem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać ustawiając wszystkie jego litery w dowolnej kolejności. Na przykład, istnieją trzy anagramy słowa** `aab`**, są to:** `aab`, `aba` **oraz** `baa`**. Anagramy słowa można uporządkować w kolejności alfabetycznej. Porównując dwa słowa, wcześniej powinno być to, które na pierwszej różnicującej pozycji ma wcześniejszą literę alfabetu. Rozpatrzmy wszystkie anagramy słowa** `nauka`**. Jaki jest dziewiąty w kolejności alfabetycznej anagram tego słowa?**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

117. **Anagramem słowa nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać ustawiając wszystkie jego litery w dowolnej kolejności. Na przykład, istnieją trzy anagramy słowa** `aab`**, są to:** `aab`, `aba` **oraz** `baa`**. Anagramy słowa można uporządkować w kolejności alfabetycznej. Porównując dwa słowa, wcześniej powinno być to, które na pierwszej różnicującej pozycji ma wcześniejszą literę alfabetu. Rozpatrzmy wszystkie anagramy słowa** `abcde`**. Jaki jest setny w kolejności alfabetycznej anagram tego słowa?**

118. **Słowo nazywamy dobrym, jeżeli składa się jedynie z liter** `a`, `b` **oraz** `c` **i żadne dwie sąsiednie litery nie są takie same. Ile jest siedmioliterowych dobrych słów?**

119. **Słowo złożone jedynie z zer i jedynek nazywamy ciekawym, jeśli nie zawiera dwóch sąsiednich jedynek. Na przykład słowo** `10010001` **jest ciekawe, ale słowo** `1011010` **nie jest. Ile jest siedmioznakowych ciekawych słów?**

120. **Słowo złożone jedynie z zer i jedynek nazywamy ciekawym, jeśli nie zawiera dwóch sąsiednich jedynek. Na przykład słowo** `10010001` **jest ciekawe, ale słowo** `1011010` **nie jest. Ile jest ośmioznakowych ciekawych słów?**

121. **Ile wynosi najmniejsza liczba naturalna x, która spełnia wszystkie poniższe warunki:**
- jest podzielna przez 3
- daje resztę 3 przy dzieleniu przez 7
- kończy się cyfrą 5

122. **Ile wynosi najmniejsza liczba naturalna x, która spełnia wszystkie poniższe warunki:**
- jest podzielna przez 7
- daje resztę 6 przy dzieleniu przez 8
- kończy się cyfrą 2

123. **Funkcja $s(n)$ zwraca na sumę cyfr liczby n. Na przykład: $s(123) = 1 + 2 + 3 = 6$. Podaj najmniejszą liczbę naturalną n, dla której $s(n) = 15$.**

124. **Funkcja $s(n)$ zwraca na sumę cyfr liczby n. Na przykład: $s(123) = 1 + 2 + 3 = 6$. Podaj najmniejszą liczbę naturalną n, dla której $n + s(n) = 37$.**

125. **Funkcja $m(n)$ zwraca iloczyn cyfr liczby n. Na przykład: $m(123) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Podaj najmniejszą liczbę naturalną n, dla której $m(n) = 160$.**

126. **Funkcja $m(n)$ zwraca iloczyn cyfr liczby n. Na przykład: $m(123) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Podaj najmniejszą liczbę naturalną n, dla której $m(n) = 432$.**

127. **Funkcja $m(n)$ zwraca iloczyn cyfr liczby n. Na przykład: $m(123) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Ile jest liczb naturalnych n, dla których $m(n) = 17$?**

128. **Funkcja $s(n)$ zwraca na sumę cyfr liczby n. Na przykład: $s(123) = 1 + 2 + 3 = 6$. Funkcja $m(n)$ zwraca iloczyn cyfr liczby n. Na przykład: $m(123) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Spośród liczb naturalnych od 1 do 100 włącznie, ile jest n, dla których $s(n) + m(n) = 18$?**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

129. **Dany jest ciąg liczb:** $[3, 2, 5, 8, 4, 6, 9, 1, 7]$ **W jednym ruchu możemy zamienić dwie sąsiednie liczby miejscami. Ile trzeba wykonać ruchów, żeby ciąg był posortowany rosnąco?**

130. **Ile jest trójkątów na poniższym rysunku?**

Trójkąty

131. **Spośród liczb naturalnych od 1 do 1000 włącznie, ile jest parzystych lub podzielnych przez 3?**

132. **Jaka jest największa możliwa suma pól, przez które przejdziemy na poniższej planszy, jeśli przechodzimy od lewego dolnego do prawego górnego rogu planszy, wykonując jedynie ruchy do góry lub w prawo?**

2	1	1	3	0
1	0	2	1	2
3	2	3	0	1
1	1	0	1	1
0	2	3	1	2

Plansza

133. **W ciągu** $[1, 5, 3, 9, 4, 1, 8, 5, 10, 9, 6, 4]$ **chcemy wybrać niektóre liczby - dowolnie wiele - o największej możliwej sumie. Nie wolno jednak wybrać dwóch sąsiadujących elementów. Jaką największą sumę wybranych liczb można osiągnąć?**

134. **Bajtazar zsumował wszystkie liczby naturalne od 1 do 100 włącznie poza jedną. Wynik jaki mu wyszedł to 5000. Jaką liczbę pominął Bajtazar?**

135. **Bajtazar dysponuje patyczkami o długościach** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **(po jednym patyczku każdej długości). Ile różnych trójkątów (o dodatnim polu, czyli np.** $[1, 2, 3]$ **nie nadaje się na trójkąt) może utworzyć z tych patyczków? Dwa trójkąty uznajemy za różne, jeśli zbiory użytych patyczków są różne.**

136. **Kolejnym cyfrom od 0 do 9 przypisano słowa:** `ZERO`, `JEDEN`, `DWA`, `TRZY`, `CZTERY`, `PIEC`, `SZESC`, `SIEDEM`, `OSIEM`, `DZIEWIEC`. **Bajtazar zapisał pewną liczbę słowami i posortował uzyskane litery, wyszło mu:** `CDDEEEEEEIIIJMNOORSWZZ`. **Jaka jest najmniejsza liczba (bez zer wiodących) jaką mógł napisać Bajtazar?**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

137. **W turnieju tenisowym bierze udział 50 graczy. Turniej jest rozgrywany systemem pucharowym - w każdej rundzie gracze są losowo dobierani w pary, każda para gra ze sobą, przegrany odpada, zaś zwycięzca przechodzi do kolejnej rundy. Jeśli graczy w danej rundzie jest nieparzysta liczba, jeden ma "wolny los" i przechodzi do kolejnej rundy automatycznie. Rundy rozgrywa się, aż pozostaje tylko jeden gracz - zwycięzca. Ile rund będzie trzeba rozegrać, aby poznać zwycięzcę turnieju?**

138. **W turnieju tenisowym bierze udział pewna liczba graczy. Turniej jest rozgrywany systemem pucharowym - w pierwszej rundzie gracze są losowo dobierani w pary, każda para gra ze sobą, przegrany odpada, zaś zwycięzca przechodzi do kolejnej rundy. Jeśli graczy w danej rundzie jest nieparzysta liczba, jeden ma "wolny los" i przechodzi do kolejnej rundy automatycznie. Rundy rozgrywa się, aż pozostaje tylko jeden gracz - zwycięzca. Program turnieju przewiduje 8 rund. Ilu najwięcej graczy można zapisać do turnieju?**

139. **Autobus zatrzymuje się na przystanku i wysiada z niego połowa wszystkich pasażerów i jeszcze pół pasażera. Na kolejnym przystanku sytuacja się powtarza: z autobusu wysiada połowa wszystkich pasażerów i jeszcze pół pasażera. Łącznie jest 6 przystanków, na każdym powtarza się taki sam scenariusz, przy czym z ostatniego przystanku autobus odjeżdża pusty. Za każdym razem z autobusu wychodziła całkowita liczba pasażerów. Ilu pasażerów było w autobusie na początku?**

140. **Danych jest 7 odważników o różnych masach, uporządkowanych od najcięższego do najlżejszego. Mamy również do dyspozycji wagę szalkową, za pomocą której można porównać ze sobą wagi dwóch dowolnie wybranych odważników. Znaleźliśmy ósmy odważnik, o którym wiemy że ma inną masę od pozostałych i chcemy go wstawić na swoje miejsce w porządku wag - między pewne dwa znane już nam inne odważniki, ewentualnie na początek lub koniec ciągu odważników. Ile minimalnie musimy wykonać ważeń, aby to miejsce znaleźć?**

141. **Rozważmy następującą funkcję:**

```
F(x):
  i = x
  dopóki i>0 wykonuj
    dla j = 1, 2, ..., i
      wypisz("*")
    i = i-1
```

Ile gwiazdek wypisze wywołanie `F(100)`**?**

142. **Rozważmy następującą funkcję:**

```
F(x):
  i = x
  dopóki i>0 wykonuj
    dla j = 1, 2, ..., i
      wypisz("*")
    i = i-2
```

Ile gwiazdek wypisze wywołanie `F(1000)`**?**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

143. **Rozważmy następującą funkcję:**

```
F(x):
  i = x
  dopóki i>0 wykonuj
    dla j = 1, 2, ..., i
      wypisz("*")
    i = i/2
```

Ile gwiazdek wypisze wywołanie `F(512)`**?**

144. **Rozważmy poniższą funkcję rekurencyjną:**

```
F(x):
  jeżeli x = 0 to zwróć 0
  zwróć F(x / 10) + (x mod 10)
```

Zakładamy, że / oblicza iloraz z dzielenia (zaokrągla w dół), a `mod` **oznacza operację obliczenia reszty z dzielenia. Jaki jest wynik działania** `F(396)`**?**

145. **Rozważmy poniższą funkcję rekurencyjną:**

```
F(x):
  jeżeli x = 0 to zwróć 0
  zwróć F(x / 10) + (x mod 10)
```

Zakładamy, że / oblicza iloraz z dzielenia (zaokrągla w dół), a `mod` **oznacza operację obliczenia reszty z dzielenia. Jaki jest wynik działania** `F(4242...42)`**, gdzie liczba wejściowa składa się z 8 razy powtórzonego** `42`**?**

146. **Przesyłką pocztową można nadać kopertę o masie maksymalnie 100 gramów, a do koperty zmieszczą się co najwyżej dwa przedmioty. Musimy wysłać grupę 10 przedmiotów o wagach, podanych w gramach, kolejno: $[90, 85, 78, 70, 64, 55, 51, 35, 19, 8]$. Ilu minimalnie przesyłek musimy użyć? Zakładamy, że koperta nic nie waży.**

147. **Dane są dwa słowa** `autobus` **i** `albatros`**. Z każdego z nich możemy wykreślić pewną liczbę liter. Litery, które pozostaną, muszą być w obu słowach takie same, i w tej samej kolejności. Ile co najwyżej liter może pozostać w każdym ze słów?**

148. **Dane są dwa słowa** `regulaminowa` **i** `programistka`**. Z każdego z nich możemy wykreślić pewną liczbę liter. Litery, które pozostaną, muszą być w obu słowach takie same, i w tej samej kolejności. Ile co najwyżej liter może pozostać w każdym ze słów?**

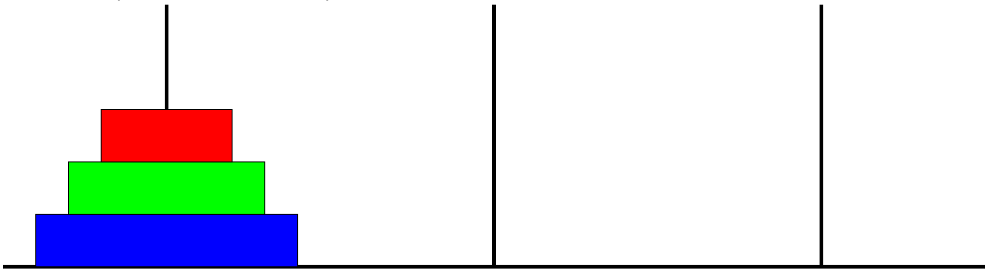
149. **Bajtazar pomyślał liczbę między 1 a 10. Bajtynka usiłuje ją odgadnąć - może w tym celu zapytać Bajtazara "czy Twoją liczbą jest** `x`**?", a Bajtazar musi odpowiedzieć "tak", "nie, moja liczba jest mniejsza", albo "nie, moja liczba jest większa". Ile pytań musi zadać Bajtynka, żeby na pewno zgadnąć liczbę Bajtazara? Uznajemy, że sukces następuje, kiedy Bajtazar musi odpowiedzieć "tak".**

150. **Bajtazar pomyślał liczbę między 1 a 20. Bajtynka usiłuje ją odgadnąć - może w tym celu zapytać Bajtazara "czy Twoją liczbą jest** `x`**?", a Bajtazar musi odpowiedzieć "tak", "nie, moja liczba jest mniejsza", albo "nie, moja liczba jest większa". Ile pytań musi zadać Bajtynka, żeby na pewno zgadnąć liczbę Bajtazara? Uznajemy, że sukces następuje, kiedy Bajtazar musi odpowiedzieć "tak".**

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

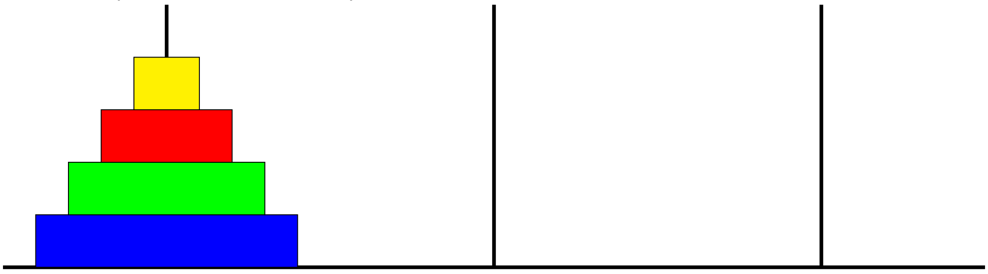
151. **Siedmioro gości na przyjęciu wzniosło toast - każdy trącił swoim kieliszkiem w kieliszki wszystkich pozostałych. Ile razy rozległ się brzęk trącanych kieliszków? Zakładamy, że każdy dźwięk był oddzielny.**

152. **Rozważmy zagadkę wież Hanoi. Zagadka polega na przełożeniu krążków z lewego słupka na prawy. W jednym ruchu wolno wziąć jeden krążek ze szczytu dowolnego słupka i odłożyć go na innym słupku. Nie wolno przy tym w żadnym momencie położyć krążka większego na mniejszy. Ile minimalnie ruchów potrzeba wykonać, aby rozwiązać tę zagadkę (dla trzech krążków)?**



Zagadka wież Hanoi

153. **Rozważmy zagadkę wież Hanoi. Zagadka polega na przełożeniu krążków z lewego słupka na prawy. W jednym ruchu wolno wziąć jeden krążek ze szczytu dowolnego słupka i odłożyć go na innym słupku. Nie wolno przy tym w żadnym momencie położyć krążka większego na mniejszy. Ile minimalnie ruchów potrzeba wykonać, aby rozwiązać tę zagadkę (dla czterech krążków)?**



Zagadka wież Hanoi

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022”.